С 2.4. Заметим, что $y = 0; y = -1$ являются решениями уравнения

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0.$$

Теперь, предполагая, что $y \neq 0; y \neq= -1$ преобразуем уравнение:

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \operatorname{tg} x \, dx = 0$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| - \ln|\cos x| = C_0$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = \ln e^{C_0}|\cos x|$$

$$\frac{y}{1+y} = C \cdot \cos x,$$

где $C \neq 0$. Заметим, что при $C = 0$ функция $y = 0$ удовлетворяет последнему уравнению. Таким образом получаем следующий ответ: $\boxed{y = -1}$ или $\boxed{y = \frac{C\cos x}{1 - C\cos x} \quad \forall C \in \mathbb{R}}$.

С 2.13. Заметим, что $y = 0; y = -1$ являются решениями уравнения

$$(x+1)y' + y(y+1) = 0.$$

Предполагая, что $y \neq 0; y \neq -1$ получим эквивалентные уравнения

$$\frac{dy}{y(1+y)} + \frac{dx}{1+x} = 0$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| + \ln|1+x| = C_0$$

$$\left|\frac{y}{1+y}\right| = \frac{e^{C_0}}{|1+x|}$$

$$\frac{y}{1+y} = \frac{C}{1+x},$$

где $C \neq 0$. Заметим, что при $C = 0$ функция $y = 0$ удовлетворяет последнему уравнению. Таким образом получаем следующий ответ: $\boxed{y = -1}$ или $\boxed{y(1+x) = C(1+y) \ \forall C \in \mathbb{R}}$.

С 2.33. Заметим, что $y \neq 0$ в силу условии $y(0) = 1/4$. Уравнение разделим на $y(e^x + 1)^2$:

$$(e^x + 1)^2 y' + (e^{2x} - 1)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 0$$

Заметим, что

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right) dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{e^x + 1} =$$

$$= |e^x := t| = \int dx - 2\int \frac{dt}{t(t+1)} = x - 2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C^* =$$

$$= x - 2\ln\frac{e^x}{e^x+1} + C^* = \ln\frac{(e^x+1)^2}{e^x} + C^*.$$

Значит, после интегрирования наше уравнение станет

$$\ln|y| + \ln\frac{(e^x+1)^2}{e^x} = C_0$$

$$|y| = e^{C_0}\cdot\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$y = \frac{Ce^x}{(e^x+1)^2}, C \neq 0$$

Учитывая условие $y(0) = 1/4$ и подставляя $x = 0$ получаем $C = 1$. Итак, ответ:

$$\boxed{y = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.}$$

С 2.45. Вычисляем производную:

$$y = C\cos x + 2$$

$$y' = -C\cos x$$

Вычислив C и приравняв полученные два выражения имеем

$$\operatorname{tg} x\,(y-2) = -y'$$

Заменим $-y'$ на $1/y'$ и решим уравнение:

$$(y-2)dy = \operatorname{ctg} x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y = \ln|\sin x| + C_0$$

$$\boxed{e^{\frac{y^2}{2}-2y} = C\sin x\,, C \neq 0.}$$

Ф 67. Заменив $t = y^3$ получим

$$t' + 16x = 2xt.$$

Заметим, что $t = 8$ $(y = 2)$ решение этого уравнения. Предположим, что $t \neq 8$. Тогда

$$\frac{dt}{t-8} = 2x$$

$$\ln|t-8| = x^2.$$

Но ведь любое решение t последнего уравнения при $x \to \infty$ очевидно неограничено, а значит не ограничено и y. Отсюда единственный ответ: $\boxed{y = 2}$.

Ф 109. Заменив $y = tx$ и учитывая, что $dy = xdt + tdx$, получаем

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{xdt}{dx} = (1 + t) \ln(1 + t)$$

Поскольку мы должны иметь $1 + t > 0$, то при делении на $x(1 + t) \ln(1 + t)$ мы потеряем только решение $t = 0$ ($y = 0$). При $t \neq 0$ получим

$$\frac{dt}{(1 + t) \ln(1 + t)} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln(1 + t)| = \ln|x| + C_0$$

$$|\ln(1 + t)| = e^{C_0}|x|$$

$$\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = Cx, C \neq 0$$

При $C = 0$ решение $y = 0$ удовлетворяет последнему уравнению, а значит ответ будет:

$$\boxed{\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = Cx \ \forall C \in \mathbb{R}.}$$

Ф 117. Заменим

$$\begin{cases} u = x - 3 \\ v = y + 2 \end{cases}$$

Тогда уравнение станет

$$vdu = (2u + v)dv.$$

Заменим $y = tx$:

$$tdu = (2 + t)(udt + tdu)$$

$$t(1 + t)du + u(2 + t)dt = 0$$

Заметим, что $t = 0$ ($v = 0$); $t = -1$ ($v = -u$) решения нашего уравнения. Предполагая, что $t \neq 0; t \neq -1$ получим

$$0 = \frac{du}{u} + \frac{(2 + t)}{t(1 + t)}dt = \frac{du}{u} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{1 + t}\right)dt$$

$$\ln|u| + \ln t^2 - \ln|1 + t| = C_0$$

$$u = C \cdot \frac{1 + t}{t^2}, C \neq 0$$

$$v^2 = C(v + u), C \neq 0$$

Заметим, что при $C = 0$ функция $v = 0$ удовлетворяет последнему уравнению. Значит, получаем следующий ответ: $\boxed{y = 1 - x}$ или $\boxed{(y + 2)^2 = C(y + x - 1) \ \forall C \in \mathbb{R}}$.

C 3.22. $xy' - 2y = 2x^4$.

Сначала решим

$$xy' - 2y = 0 \iff \left(\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \wedge y \neq 0\right) \vee y = 0$$

$$\iff (\ln|y| = 2\ln|x| + C_0 \wedge C_0 \neq 0 \wedge y \neq 0) \vee y = 0$$

$$\iff y = Cx^2, C \in \mathbb{R}.$$

Теперь рассмотрим C как функцию от x: $C = C(x)$. Подставим в начальное уравнение наше решение

$$x(C'x^2 + 2Cx) - 2Cx^2 = 2x^4$$

$$\iff C' = 2x$$

$$C = x^2 + A, A \in \mathbb{R}.$$

Отсюда решение исходного уравнения будет $\boxed{y = x^4 + Ax^2, A \in \mathbb{R}}$.

C 3.37. $x^2y' = 5xy + 6$.

Сначала решим

$$x^2y' = 5xy \iff xy' = 5y \iff \frac{dy}{y} = \frac{5dx}{x} \iff y = Cx^5, C \in \mathbb{R}.$$

Теперь,

$$x^2(C'x^5 + 5Cx^4) = 5Cx^6 + 6$$

$$C' = \frac{6}{x^7} \iff C = -\frac{1}{x^6} + A, A \in \mathbb{R}.$$

Значит $y = -\frac{1}{x} + Ax^5$. Подставляя $y(1) = 1$ получим $\boxed{y = 2x^5 - \frac{1}{x}}$.

C 3.55. $y' - \frac{y}{x} = y^2$.

Очевидно, $y = 0$ решение. Далее предположим, что $y \neq 0$. Заменим $z = y^{-1}$:

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{xz} = \frac{1}{z^2} \iff -z = xz' + x.$$

$$-z = xz' \iff \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \iff z = \frac{C}{x}, C \neq 0.$$

$$-z = x\left(\frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}\right) + x \iff C' = -x \iff C = -\frac{x^2}{2} + A, A \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{y = 0 \vee \frac{1}{y} = z = -\frac{x}{2} + \frac{A}{x}, A \in \mathbb{R}}.$$

С 3.89. $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$

$$\Leftrightarrow y' = (y - x)^2 - 3.$$

Заменим $z = y - x$:

$$\Leftrightarrow z' = z^2 - 4 \Leftrightarrow \left(\frac{dz}{z^2 - 4} = dx \wedge z^2 \neq 4\right) \vee z^2 = 4. \quad (*)$$

Очевидно, $z = \pm 2$ решения уравнения. Предположим, что $z \neq \pm 2$. Тогда

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right) dz = dx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = 4x + C_0, C_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-2}{z+2} = Ce^{4x}, C \neq 0.$$

Заметим, что

$$(*) \Leftrightarrow z = -2 \vee \frac{z-2}{z+2} = Ce^{4x}, C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда ответ:

$$\boxed{y - x = -2 \vee y - x = 2 - \frac{4Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}, C \in \mathbb{R}}.$$

Ф 147. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y = x'(y).$$

Сначала решим

$$x \operatorname{ctg} y = x' \Leftrightarrow \left(\frac{d \sin y}{\sin y} = \frac{dx}{x} \wedge x \neq 0\right) \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln|\sin y| = \ln|x| + C_0 \wedge x \neq 0) \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = C \sin y, C \in \mathbb{R}.$$

Теперь, приняв $C = C(y)$ за функцию решим исходное равенство:

$$\sin^2 y + C \cos y = C' \sin y + C \cos y \Leftrightarrow C'(y) = \sin y \Leftrightarrow C = A - \cos y, A \in \mathbb{R}.$$

Отсюда ответ: $\boxed{x = \sin y\,(A - \cos y), A \in \mathbb{R}}$.

С 4.4. $(y - \sin x)dx + (x + e^y)dy = 0.$

Найдем такую функцию $u(x, y)$, дифференциал которой равен выражению левой стороны:

$$u = \int (y - \sin x)dx = xy + \cos x + \varphi(y)$$

$$x + e^y = \frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi' \Longrightarrow \varphi(y) = e^y + C$$

Отсюда ответ: $\boxed{0 = xy + \cos x + e^y + C}$.

С 4.20. $2xydx + (2y^3 - x^2)dy = 0$.

Очевидно, $y = 0$ решение. Предположим, что $y \neq 0$. Найдем интегрирующий множитель $\mu = \mu(y)$:

$$2xy\mu dx + (2y^3\mu - x^2\mu)dy = 0$$

$$(2xy\mu)'_y = (2y^3\mu - x^2\mu)'_x$$

$$2x\mu + 2xy\mu' = -2\mu x$$

$$y\mu' = -2\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dy}{y}$$

$$\mu(y) = \frac{C}{y^2}$$

Разделим начальное уравнение на y^2 и решим:

$$\frac{2x}{y}dx + \left(2y - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\int \frac{2x}{y}dx = \frac{x^2}{y} + \varphi(y)$$

$$2y - \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x^2}{y} + \varphi\right)'_y = -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'$$

$$\varphi(y) = y^2 - C$$

$$\frac{x^2}{y} + y^2 = C$$

Отсюда ответ: $\boxed{y = 0 \vee x^2 = Cy - y^3}$.

З 1. Решим уравнение $y' = \frac{y^2}{x^3} + \frac{2y}{x} - x$. Заметим, что это эквивалентно следующему:

$$(y + x^2)' = \frac{(y + x^2)^2}{x^3} \Leftrightarrow z' = \frac{z^2}{x^3}, z(x) = y(x) + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^3} \wedge z \neq 0\right) \vee z = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} = \frac{1}{2x^2} + C, C \in \mathbb{R}\right) \vee z = 0.$$

Ответ: $\boxed{y=-x^2, y=x^2\frac{1-2Cx^2}{1+2Cx^2}}$.

С 7.5. Решим $yy''-y'^2=y'y^2$. Очевидно, $y=0$ решение. Далее предполагая, что $y\neq 0$ получим:

$$\Leftrightarrow y'=\left(\frac{y'}{y}\right)'\Leftrightarrow y=\frac{y'}{y}+C_1.$$

Если $C_1=0$, то

$$\frac{dy}{y^2}=dx\Leftrightarrow -y^{-1}=x-C\Leftrightarrow y(C-x)=1.$$

В противном случае, очевидно, $y=C_1$ решение. Далее предполагая, что $y\neq C_1$ получаем

$$\frac{dy}{y(y-C_1)}=dx\Leftrightarrow\frac{dy}{C_1}\left(\frac{1}{y-C_1}-\frac{1}{y}\right)=dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-C_1}{y}\right|=C_1\left(x+\tilde{C}_2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ye^{C_1x+C_1\widetilde{C_2}}=y-C_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(1-C_2e^{C_1x})=C_1.$$

Значит ответ: $\boxed{y(1-C_2e^{C_1x})=C_1, C_1, C_2\in\mathbb{R};\ \ y(C-x)=1, C\in\mathbb{R}}$.

С 7.18. Решим $y''\sin^3x-\left(y'\sin^2x+y'^2\right)\cos x=0$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Заменим $y'=z$ и разделим уравнение на $\sin^4x$:

$$\frac{z'\sin x-z\cos x}{\sin^2x}=\frac{z^2\cos x}{\sin^4x}$$

$$\left(\frac{z}{\sin x}\right)'=\left(\frac{z}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{\cos x}{\sin^2x}.$$

Заменим $\frac{z}{\sin x}=u$:

$$u'=\frac{u^2\cos x}{\sin^2x}\Leftrightarrow\frac{du}{u^2}=\frac{d\sin x}{\sin^2x}\Leftrightarrow -u^{-1}=-(\sin x)^{-1}-C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{\sin x}{1+C\sin x}\Leftrightarrow z=\frac{\sin^2x}{1+C\sin x}.$$

Из условия $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ получаем $C=0$ и $y'=z=\sin^2x$.

$$y=\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Из условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ получаем $C=-\frac{\pi}{4}$ и $\boxed{y=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\pi}{4}}$.

С 7.41. Решим $yy'' + \frac{yy'}{x} - y'^2 = 0$. Заменим $z = \frac{y'}{y}$. Тогда $y'' = y(z^2 + z')$:

$$y^2(z^2 + z') + \frac{y^2 z}{x} - y^2 z^2 = 0$$

$$y^2\left(z' + \frac{z}{x}\right) = 0.$$

Очевидно, $y = 0$ и $z = 0$ решения. Пусть $y \neq 0, z \neq 0$. Тогда

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|z| = -\ln|x| + C_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{C}{x}, C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{C}{x}, C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = C\frac{dx}{x}, C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = C\ln|x| + C_1$$

$$\Leftrightarrow |y| = \widetilde{C_1}|x|^C, C \neq 0, \widetilde{C_1} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \tilde{C}|x|^C, C \neq 0, \tilde{C} \neq 0.$$

Отсюда ответ $\boxed{y = \tilde{C}|x|^C, C, \tilde{C} \in \mathbb{R}}$.

С 7.44. Решим $x^2 yy'' = (xy' + y)^2, x \neq 0$. Заменим $y' = yz$. Тогда $y'' = y(z^2 + z')$:

$$x^2 y^2(z^2 + z') = y^2(xz + 1)^2.$$

$y = 0$ очевидное решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда

$$x^2(z^2 + z') = (xz + 1)^2$$

$$x^2 z' = 2xz + 1.$$

Сначала решим $x^2 z' = 2xz$:

$$xz' = 2z \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|z| = \ln x^2 + C_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = Cx^2, C \neq 0$$

Теперь считая $C = C(x)$ функцией решим исходное равенство:

$$z' = C'x^2 + 2xC$$

$$C'x^4 + 2x^3 C = 2x^3 C + 1$$

$$C' = \frac{1}{x^4}$$

$$C = -\frac{1}{3x^3} + C_1.$$

$$z = x^2\left(-\frac{1}{3x^3} + C_1\right) = -\frac{1}{3x} + x^2C_1$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{3x} + x^2C_1$$

$$\frac{dy}{y} = \left(-\frac{1}{3x} + x^2C_1\right)dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}\ln|x| + x^3\widetilde{C_1} + C_2$$

$$\boxed{\ln\left|yx^{\frac{1}{3}}\right| = x^3\widetilde{C_1} + C_2}.$$

3 2. Решим $y'' + 2y' = \frac{y'^2}{y+1} + \frac{y'}{x}\ln\left(\frac{y+1}{y'}\right), y(1) = 1, y'(1) = \frac{2}{e}$. Очевидно, $y = 0$ и $y = -1$ запрещены по условию. Отныне предположим, что $y \neq 0$. Заменим $z = \frac{y'}{y+1}$; тогда $y'' = (y+1)(z^2 + z')$:

$$(y+1)(z^2 + z') + 2z(y+1) = z^2(y+1) - \frac{z(y+1)}{x}\ln z$$

$$z^2 + z' + 2z = z^2 - \frac{z}{x}\ln z$$

$$z' + 2z = -\frac{z}{x}\ln z.$$

Заменим $t = \ln|z|$:

$$e^t t' + 2e^t = -\frac{e^t}{x}t$$

$$t' + 2 = -\frac{t}{x}.$$

Сначала решим

$$t' = -\frac{t}{x} \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|t| = -\ln|x| + C_0 \Leftrightarrow t = \frac{C}{x}, C \neq 0.$$

Теперь, принимая $C = C(x)$ за функцию получим:

$$\frac{C'x - C}{x^2} + 2 = -\frac{C}{x^2} \Leftrightarrow C' = -2x \Leftrightarrow C = -x^2 + C_1$$

$$t = -x + \frac{C_1}{x}.$$

По условию

$$\frac{1}{e} = \frac{y'}{y+1}(1) = z(1) = e^{t(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = t(1) = -1 - C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -x \Leftrightarrow z = e^{-x}$$

$$\frac{y'}{y+1} = e^{-x} \Leftrightarrow \ln|y+1| = -e^{-x} + C_0$$

$$y = Ce^{(-e^{-x})} - 1$$

По условию $y(1) = 1$

$$2 = Ce^{(-e^{-1})} \Leftrightarrow C = 2e^{(e^{-1})}$$

$$\boxed{y = 2e^{e^{-1}-e^{-x}} - 1}.$$

Ф 278. Решим $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$. Заменим $p = y'$ и дифференцируем уравнение:

$$p^2 - 2xp = x^2 - 4y$$

$$2pdp - 2xdp - 2pdx = 2xdx - 4pdx$$

$$(p - x)(dp + dx) = 0.$$

1. $x = p$:

$$x^2 - 2x^2 = x^2 - 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2}.$$

2. $dx = -dp$:

$$p = -x + C \Leftrightarrow (-x + C)^2 - 2x(-x + C) = x^2 - 4y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y = -2x^2 + 4xC - C^2.$$

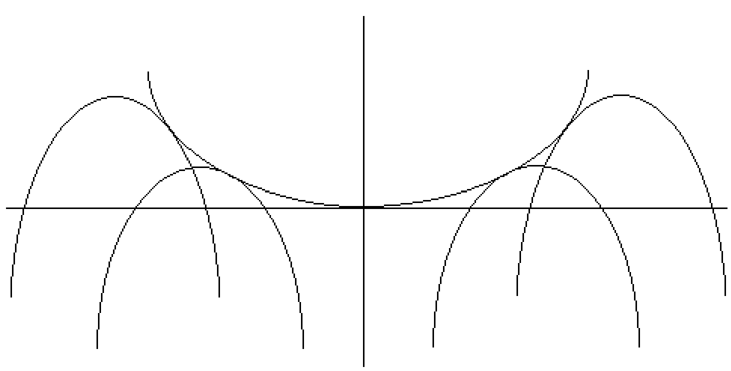
Найдем особое решение последнего однопараметрического семейства:

$$0 = (4y + 2x^2 - 4xC + C^2)'_C = 4x - 2C \Leftrightarrow C = 2x$$

$$4y = -2x^2 + 8x^2 - 4x^2 = 2x^2$$

$$2y = x^2.$$

Итак, ответ: $\boxed{4y = -2x^2 + 4xC - C^2; 2y = x^2}$.



Ф 282. Решим $2xy' - y = y' \ln yy'$. Заменим $y' = p$. Тогда

$$2xp - y = p \ln yp$$

$$\frac{dy}{p} = dx = \frac{dy}{2y} + \frac{dp}{2p} + \frac{dy}{2p} - \frac{ydp}{2p^2}$$

$$(p - y)(pdy + ydp) = 0$$

1. $p = y \Leftrightarrow y' = y \Leftrightarrow y = Ce^x$. Подставляя это в исходное уравнение получим:

$$2xCe^x - Ce^x = Ce^x \cdot 2\ln|Ce^x| \Leftrightarrow C = \pm e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = \pm e^{x-\frac{1}{2}}}.$$

2. $pdy + ydp = 0 \Leftrightarrow yp = C \Leftrightarrow ydy = Cdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = Cx + C_1$. Подставляя эту функцию в исходное уравнение получим:

$$\frac{2xC}{\sqrt{2Cx + 2C_1}} - \sqrt{2Cx + 2C_1} = \frac{C \ln C}{\sqrt{2Cx + 2C_1}}$$

$$C_1 = -\frac{C \ln C}{2}$$

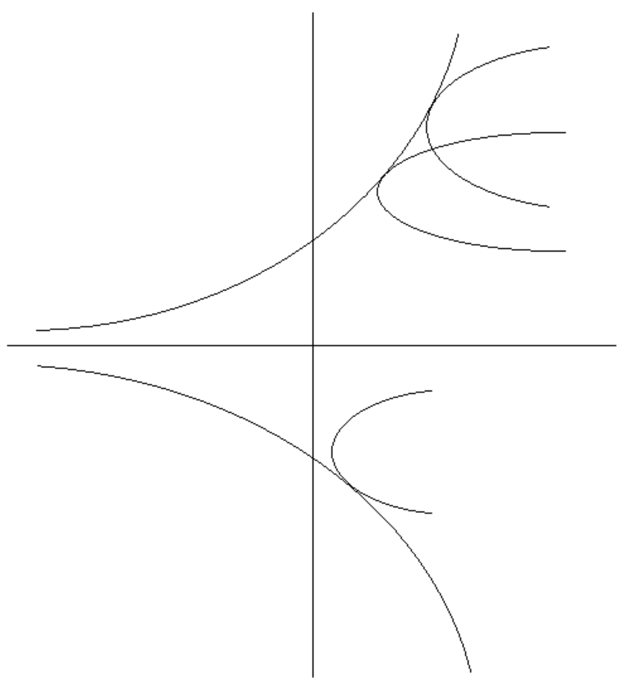
$$\boxed{\frac{y^2}{2} = Cx - \frac{C \ln C}{2}}.$$

Найдем особые кривые последнего однопараметрического семейства:

$$0 = x - \frac{1}{2} - \frac{\ln C}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\ln C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2} + \frac{C \ln C}{2} - \frac{C \ln C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\ln y^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{2x = 1 + 2\ln|y|}.$$



Ф 288. Решим $y + xy' = 4\sqrt{y'}$. Заменим $z = xy$. Тогда

$$(xy)' = 4\sqrt{y'} \Leftrightarrow z' = 4\sqrt{\frac{z'x - z}{x^2}}$$

$$z'^2 x^2 = 16z'x - 16z$$

$$(z'x - 8)^2 = 64 - 16z$$

$$|z'x - 8| = 4\sqrt{4 - z}$$

1. $z'x - 8 > 0$:

$$z' = \frac{8 + 4\sqrt{4 - z}}{x}$$
$$\frac{dz}{2 + \sqrt{4 - z}} = \frac{4dx}{x}.$$

Интегрируем левую часть:

$$\int \frac{dz}{2 + \sqrt{4 - z}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{4 - z} \\ z = 4 - t^2 \end{matrix} \right| = \int -\frac{2tdt}{2 + t} = -2 \int \left(1 - \frac{2}{2 + t}\right) dt =$$
$$= -2t + 4\ln|2 + t| + C_0 = -2\sqrt{4 - z} + 4\ln\left|2 + \sqrt{4 - z}\right| + C_0.$$

Значит

$$-2\sqrt{4 - z} + 4\ln\left|2 + \sqrt{4 - z}\right| + C_0 = 4\ln|x|$$
$$\boxed{\left(2 + \sqrt{4 - xy}\right)^2 e^{-\sqrt{4 - xy}} = Cx^2, C > 0}.$$

2. $z'x - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 4\sqrt{4 - z} \Leftrightarrow \boxed{xy = 4}$.
3. $z'x - 8 < 0$:

$$z' = \frac{8 - 4\sqrt{4 - z}}{x}$$

При $2 - \sqrt{4 - z} = 0$ получаем $\boxed{y = 0}$. Если это не так, то разделим уравнение на это выражение:

$$\frac{dz}{2 - \sqrt{4 - z}} = \frac{4dx}{x}.$$

Аналогично вышеуказанным вычислениям получим

$$2\sqrt{4 - z} + 4\ln\left|\sqrt{4 - z} - 2\right| + C_0 = 4\ln|x|$$
$$\boxed{\left(2 - \sqrt{4 - xy}\right)^2 e^{\sqrt{4 - xy}} = Cx^2, C > 0}.$$

С 6.25. Решим $4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2$. Заменим $y' = p$. Тогда

$$4xp - 8y = 4x^2 - p^2$$

$$4xdp + 4pdx - 8pdx = 8xdx - 2pdp$$

$$(2x + p)(dp - 2dx) = 0.$$

При $2x + p = 0$ получаем $y = -x^2 + C$. Подставляя эту функцию в исходное уравнение получим $4(-2x^2 + 2x^2 - 2C) = 4x^2 - 4x^2 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -x^2}$.

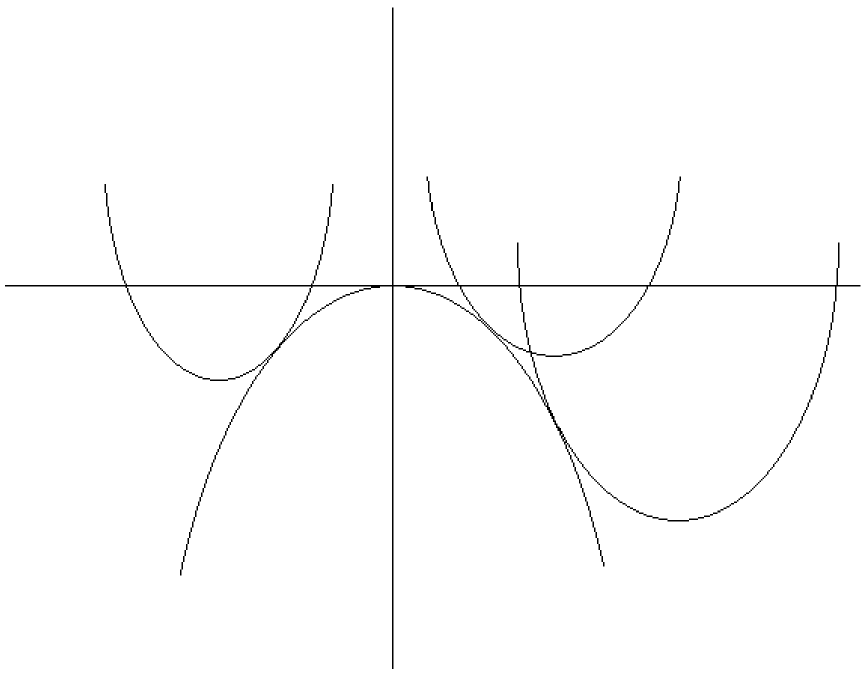
При $dp - 2dx = 0$ получим $p = 2x + C \Leftrightarrow y = x^2 + Cx + C_1$. Подставляя эту функцию в исходное уравнение получим

$$4(2x^2 + Cx - 2x^2 - 2Cx - 2C_1) = 4x^2 - 4x^2 - C^2 - 4Cx$$

$$C_1 = \frac{C^2}{8} \Leftrightarrow \boxed{y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8}}.$$

Найдем особое решение последнего однопараметрического семейства:

$$0 = x + \frac{C}{4} \Leftrightarrow C = -4x \Leftrightarrow y = x^2 - 4x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow \boxed{y = -x^2}.$$



35. Решим $2y(y' + 2) - x(y')^2 = 0$. Заменим $y' = p$: $2yp + 4y - xp^2 = 0$. Если $p = 0$, то $y = C$ и $4C - xC^2 = 0$, откуда $C = 0$ и $\boxed{y = 0}$. Пусть $p \neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{p} = dx = \frac{2dy}{p} - \frac{2ydp}{p^2} + \frac{4dy}{p^2} - \frac{8ydp}{p^3}$$

$$p^2dy = 2p^2dy - 2ypdp + 4pdy - 8ydp$$

$$0 = (p + 4)(pdy - 2ydp)$$

Если $p = -4$, то $y = -4C + x$. Подставляя это в исходное уравнение находим

$$2(-4x + C)(-2) - 16x = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -4x}.$$

Если же $pdy - 2ydp = 0$, то

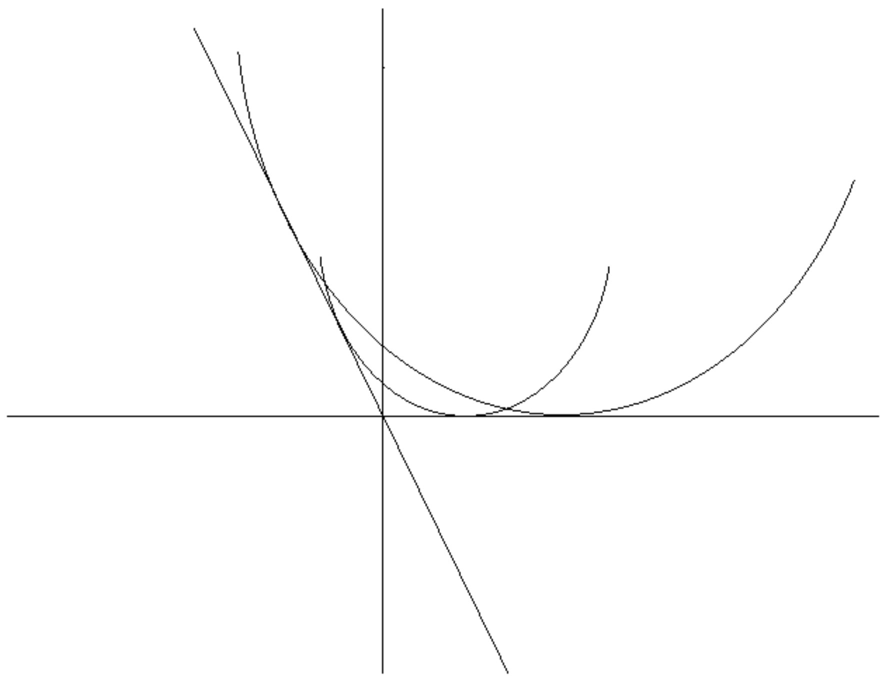
$$y = Cp^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \frac{dx}{\sqrt{|C|}} \Leftrightarrow 2\sqrt{|y|} = \frac{x}{\sqrt{|C|}} + C_1.$$

Подставив найденную функцию в исходное уравнение получим

$$\frac{\operatorname{sign} y}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{|C|}} + C_1\right)^2 \left(2 + \frac{\operatorname{sign} y}{2\sqrt{|C|}}\left(\frac{x}{\sqrt{|C|}} + C_1\right)\right) - \frac{x}{4|C|}\left(\frac{x}{\sqrt{|C|}} + C_1\right)^2$$

$$C_1 = \pm 4\sqrt{|C|}$$

$$\boxed{|y| = \left(\frac{x}{\sqrt{|C|}} \pm 4\sqrt{|C|}\right)^2}.$$



Найдем особые решения:

$$0 = -\frac{x^2}{C^2} + 16 \Leftrightarrow |x| = 4|C|$$

$$|y| = \left(\frac{2x}{\sqrt{|x|}} \pm 2\sqrt{|x|}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y = 0 \vee y = \pm 4x}.$$

Но поскольку $y = 4x$ не удовлетворяет исходному уравнению, выкинем его.

Выясним существует ли решение, удовлетворяющее $y(-2) = 8, y(2) = 1$. Если да, то

$$\begin{cases} 8 = \dfrac{4}{|C|} + 16|C| \pm 8 \cdot (-2) \\ 1 = \dfrac{4}{|C|} + 16|C| \pm 8 \cdot 2 \end{cases},$$

что очевидно невозможно.

З 6. Решим $y'^2 = 4y^3(1-y)$. Очевидно, $\boxed{y = 0, y = 1}$ решения. Предположим, что $y \neq 0, y \neq 1$, тогда $0 < y < 1$ и $y = \sin^2 t$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3(1-y)}} = \pm 2dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^3(1-y)}} = \int \frac{2\sin t \cos t\, dt}{\sin^3 t\, |\cos t|} = 2\,\mathrm{sign}\cos t \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -2\,\mathrm{sign}\cos t\, \mathrm{ctg}\, t + C_0 =$$

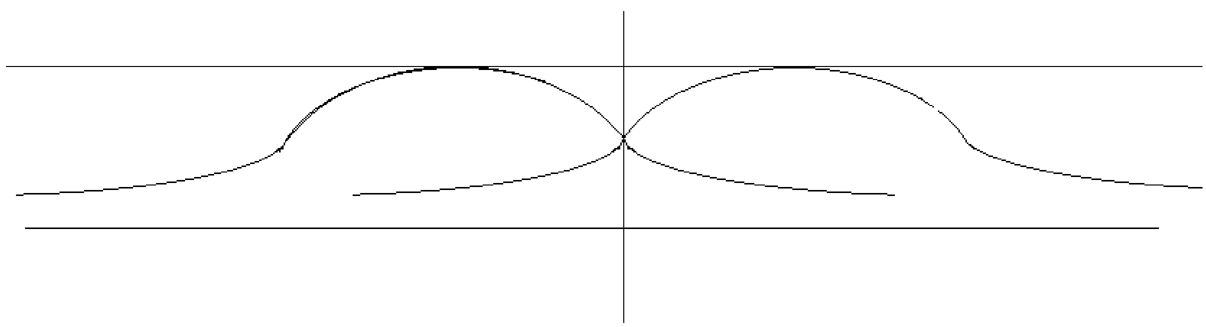
$$= -\frac{2|\cos t|}{\sin t} + C_0 = -2\sqrt{\frac{1-y}{y}} + C_0$$

$$-2\sqrt{\frac{1-y}{y}} + C_0 = \pm 2x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{(C \pm x)^2 + 1}}.$$

Найдем особые решения:

$$0 = -\frac{\pm 2(C \pm x)}{((C \pm x)^2 + 1)^2} \Leftrightarrow x = \mp C \Leftrightarrow \boxed{y = 1}.$$



С 6.38. Решим $8xy'^3 + 12yy'^2 - 9y^5 = 0$. Заменим $y' = p$. Если $p = 0$, то $\boxed{y = 0}$. В противном случае

$$8xp^3 + 12yp^2 - 9y^5 = 0$$

$$\frac{dy}{p} = dx = d\left(\frac{9y^5}{8p^3} - \frac{3y}{2p}\right) = \frac{45y^4}{8p^3}dy - \frac{27y^5}{8p^4}dp + \frac{3y}{2p^2}dp - \frac{3dy}{2p}$$

$$0 = (9y^4 - 4p^2)(5pdy - 3ydp)$$

Если $y' = \pm\frac{3}{2}y^2$, то из исходного уравнения находим

$$\pm 27xy^6 + 18y^5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{xy = \pm\frac{2}{3}}.$$

В противном случае

$$5pdy = 3ydp \Leftrightarrow p = Cy^{\frac{5}{3}}, C \neq 0$$

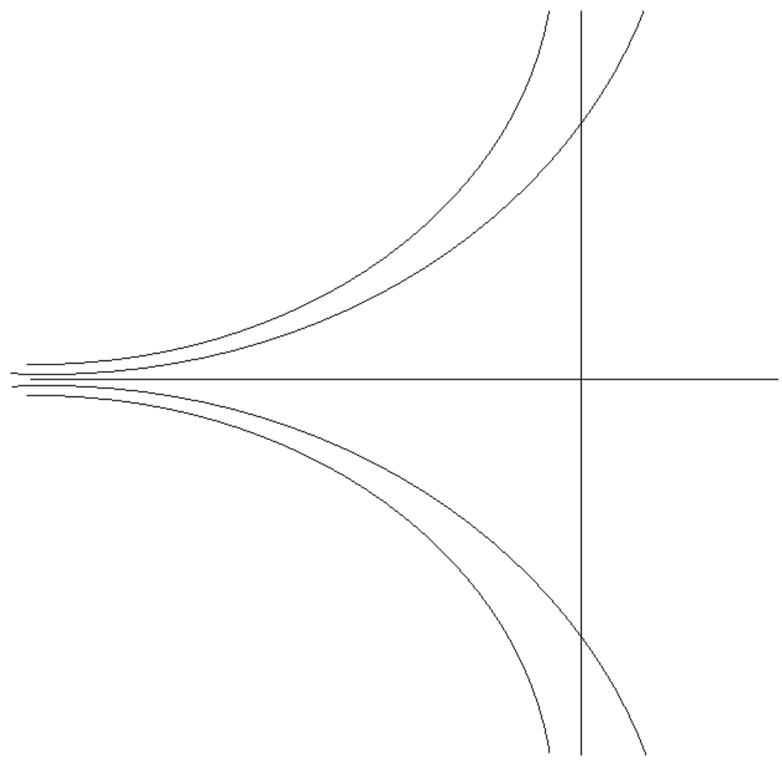
$$8xC^3y^5 + 12yC^2y^{\frac{10}{3}} - 9y^5 = 0$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{12C^2}{9 - 8C^3x} \Leftrightarrow \boxed{y = \pm A\left(\frac{3}{9 - Ax}\right)^{\frac{3}{2}}}, A^{\frac{1}{3}} = 2C.$$

Найдем особые решения:

$$0 = \frac{2}{3}A^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{9 - Ax}\right) + A^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3x}{(9 - Ax)^2}$$

$$Ax = -18 \Leftrightarrow \boxed{xy = \pm\frac{2}{3}}.$$



С 4.55. Решим $\big((3x^2 + 2)y + 3x\big)dx + (2x - x^3)dy = 0$. Уравнение линейно по y. Сначала решим $(3x^2 + 2)ydx + (2x - x^3)dy = 0$. Заметим, что если $x = const$, то $x = 0$ или $x = \sqrt{2}$. Пусть $x \neq 0, x \neq \sqrt{2}$. Тогда

$$\frac{dy}{y} = \frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x}dx.$$

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x}dx = \int \left(\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} + \frac{4}{x^3 - 2x}\right)dx = \ln|x^3 - 2x| + 4\int \frac{dx}{x^3 - 2x} =$$

$$= \ln|x^3 - 2x| + 2\int \frac{dx^2}{x^4 - 2x^2} = \ln|x^3 - 2x| + \int \left(\frac{1}{x^2 - 2} - \frac{1}{x^2}\right)dx^2 = \ln\left|\frac{(x^2 - 2)^2}{x}\right| + C_0$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{(x^2-2)^2}{x}\right| + C_0$$

$$y = \frac{C(x^2-2)^2}{x}.$$

Теперь примем $C = C(x)$ за функцию:

$$\frac{C(x^2-2)^2}{x}(3x^2+2) + \frac{(2-x^2)xC(x^2-2)(3x^2+2)}{x^2} + \frac{(2-x^2)xC(x^2-2)^2}{x} + 3x = 0$$

$$C' = \frac{3x}{(x^2-2)^3} \Leftrightarrow C = -\frac{3}{4}\frac{1}{(x^2-2)^2} + A$$

$$y = \frac{(x^2-2)^2}{x}\left(-\frac{3}{4}\frac{1}{(x^2-2)^2} + A\right)$$

$$(4xy+3)B = (x^2-2)^2, B \neq 0$$

Отсюда ответ: $\boxed{x = 0;\ (4xy+3)B = (x^2-2)^2, B \in \mathbb{R}}$.

С 4.55. Решим $2y^2y'' = 2y'^4 - yy'^2$ при условиях $y(1) = y'(1) = 1$. Заменим $y' = z(y)$, тогда $y'' = zz'$:

$$2y^2z'z = 2z^4 - yz^2 \Leftrightarrow y^2(z^2)' = 2z^4 - yz^2$$

$$y^2u' = 2u^2 - yu, u = z^2 \Leftrightarrow u' = 2\left(\frac{u}{y}\right)^2 - \frac{u}{y}$$

$$u' = 2v^2 - v, u = vy \Leftrightarrow v + v'y = 2v^2 - v$$

$$v'y = 2v^2 - 2v$$

Если $v = 0$, то $u = 0$ и $y' = z = 0$, что противоречит условию, а если $v = 1$, то $u = y$ и $y'^2 = y$, откуда $2\sqrt{y} = x + C$. Из условия получаем $2\sqrt{y} = x + 1$. Пусть $v \neq 0, v \neq 1$. Тогда

$$\frac{dv}{v^2 - v} = \frac{2dy}{y} \Leftrightarrow \ln\left|\frac{v-1}{v}\right| = 2\ln|y| + C_0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{v} = Cy^2, C \neq 0$$

$$u = \frac{y}{1 - Cy^2}, C \neq 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{\frac{y}{1 - Cy^2}}, C \neq 0.$$

Но никакая функция y, удовлетворяющая последним условиям не удовлетворяет условию $y'(1) = 1$. Значит ответ $\boxed{2\sqrt{y} = x + 1}$.

С 7.67. Решим $x^4y'' - x^2yy'^2 + 2xy'y^2 = y^3$ при $y(2) = 2, y'(2) = 1$. Заменим $x \to \lambda x, y \to \lambda^s y, y^{(k)} \to \lambda^{s-k}y^{(k)}$ и требуем, чтобы λ входила в равных степенях в слагаемые:

$$4 + s - 2 = 2 + s + 2s - 2 = 1 + s - 1 + 2s = 3s \Leftrightarrow s = 1.$$

Заметим, что по теореме о существования и единственности задачи Коши наше уравнение имеет единственное решение при данных условиях. Попробует найти это решение заменой $x = e^t, y = z(t)e^t$:

$$y' = (ze^t)'_t t'_x = \frac{z'e^t + ze^t}{x} = z' + z$$

$$y'' = (z' + z)'_t t'_x = \frac{z'' + z'}{e^t}$$

$$e^{4t}\frac{z'' + z'}{e^t} - e^{2t}ze^t\left(z'^2 + 2z'z + z^2\right) + 2e^t(z' + z)z^2e^{2t} = z^3e^{3t}$$

$$z'' + z' - zz'^2 = 0$$

Заметим, что $z = C$ является решением этого уравнения. Тогда $y = Cx$. Из начальных условий найдем $\boxed{y = x}$.

Ф 225. а) $y' = 2xy + y^2$. Очевидно, и функция $f = 2xy + y^2$, и производная $f'_y = 2x + 2y$ определены и непрерывны на всей плоскости, значит через каждую точку плоскости проходит единственное решение задачи Коши. Ответ: $\boxed{\mathbb{R}^2}$.

б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$. Очевидно, функция $f(x, y) = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$ определена и непрерывна на всей плоскости, а $f'_y = (y - 2x)^{-\frac{2}{3}}$ определена и непрерывна на всей плоскости, кроме точек прямой $y = 2x$. Ответ: $\boxed{\mathbb{R}^2\backslash\{(x, y)|\ y = 2x\}}$.

в) $(x - 2)y' = \sqrt{y} - x$. Очевидно, функция $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}-x}{x-2}$ определена и непрерывна на всей плоскости, кроме прямой $x = 2$, а $f'_y = \left(2\sqrt{y}(x - 2)\right)^{-1}$ определена и непрерывна на всей плоскости, кроме прямых $y = 0, x = 2$. Ответ: $\boxed{\mathbb{R}^2\backslash\{(x, y)|\ x = 2 \vee y = 0\}}$.

г) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. Очевидно, функция $f(x, y) = 1 + \operatorname{tg} y$ определена и непрерывна на всей плоскости, кроме точек прямых $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а $f'_y = \cos^{-2} y$ определена и непрерывна на всей плоскости, кроме точек прямых $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\boxed{\mathbb{R}^2\backslash\left\{(x, y){:}\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Ф 228. а) $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$.

$$\begin{cases} f(x, y) = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x} \in C\left(\mathbb{R}^2\backslash\left\{(x, y), y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \\ f'_y = \cos^{-2} y \in C\left(\mathbb{R}^2\backslash\left\{(x, y), y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \\ f'_{y'} = 0 \in C\left(\mathbb{R}^2\backslash\left\{(x, y), y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \end{cases}$$

Ответ: все точки x_0, y'_0 любые, а $y_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$.

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y+\sqrt{y}}{x+1} \in C(\mathbb{R}\backslash\{(-1,y)\}) \\ f'_y = \dfrac{1+\left(2y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{x+1} \in C(\mathbb{R}\backslash\{(x,y): x=-1 \vee y=0\}) \\ f'_{y'} = 0 \in C(\mathbb{R}\backslash\{(-1,y)\}) \end{cases}$$

Ответ: $x_0 \neq -1, y_0 \neq 0, y_0'$ любое.

Ф 230. а) $y' = x + y^2$. По теореме о существования и единственности через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственное решение, значит никакие два решения не касаются друг друга.

Ф 181. Решим $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leq M$. Сначала решим

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \Leftrightarrow x = Ce^{-t}.$$

Теперь принимая $C = C(t)$ за функцию, подставим найденную функцию в исходное уравнение:

$$x' + x = f(t)$$

$$C'e^{-t} - e^{-t}C + Ce^{-t} = f(t)$$

$$C' = f(t)e^t \Leftrightarrow C(t) = \int f(t)e^t dt.$$

Отсюда

$$x(t) = e^{-t}\int f(t)e^t dt.$$

Проверим, что x периодична с периодом T, если f периодична с периодом T:

$$x(t+T) = e^{-T}e^{-t}\int f(t+T)e^t e^T dt = e^{-t}\int f(t)e^t dt = x(t).$$

Заметим, что

$$|x| = \left|e^{-t}\int f(t)\,e^t dt\right| \leq e^{-t}\int |f(t)e^t| dt \leq e^{-t}\int Me^t dt = M + Ce^{-t}.$$

При $C = 0$ функция $x(t)$ ограничена. Значит существует ограниченное решение исходного уравнения.

С 8.3. Решим $y'' + 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, корни которого есть $\lambda = -1;\ -2$. Значит $\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}$.

С 8.8. Решим $y'' - 2y' + 10y = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, корни которого есть $\lambda = 1 \pm 3i$. Значит $\boxed{y = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)e^x}$.

С 8.13. Решим $y'' - 8y' + 16y = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, двукратный корень которого есть $\lambda = 4$. Значит $\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}}$.

С 8.23. Решим $y^{(4)} - y''' + 2y' = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^4 - y^3 + 2y = 0$, или $\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i) = 0$. Значит $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-x} + (C_3 \sin x + C_4 \cos x)e^x}$.

С 8.32. Решим $y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + 2y' - 3y = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Нетрудно найти, что это эквивалентно $(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda^2 + 1) = 0$. Отсюда $\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x}$.

С 8.35. Решим $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. Характеристическое уравнение будет $\lambda^4 + 8y^2 + 16 = 0$, двукратные корни которого $\lambda = \pm 2i$. Отсюда $\boxed{y = (C_1 + C_2 x)\sin 2x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x}$.

С 8.42. Решим $y'' + y' - 6y = -18x^2 e^{-x}$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения будет $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, откуда решения однородного уравнения получаются в виде $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. Частное решение ищем в виде $(ax^2 + bx + c)e^{-x}$:

$$2ae^{-x} - (2ax + b)e^{-x} - (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x} + (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} - (6ax^2 + 6bx + 6c)e^{-x} = -18x^2 e^{-x}$$

$$-6ax^2 - 6bx - 2ax - 6c - b + 2a = -18x^2$$

$$a = 3, b = -1, c = \frac{7}{6}.$$

Отсюда $\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \left(3x^2 - x + \frac{7}{6}\right)e^{-x}}$.

С 8.46. Решим $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5\sin x$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, откуда решения соответствующего однородного уравнения имеют вид $C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Теперь, решение уравнения $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x}$ ищем в виде $y = x(ax + b)e^{-2x}$:

$$2ae^{-2x} - 2(2ax + b)e^{-2x} - 2\big((2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx)e^{-2x}\big) + (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx)e^{-2x} = 2xe^{-2x}$$

$$-6ax - 3b + 2a = 2x$$

$$a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{2}{9},$$

откуда $y=-\frac{1}{9}(3x^2+2x)e^{-2x}$. Также ищем решение уравнения $y''+y'-2y=5\sin x$ в виде $y=a\sin x+b\cos x$:

$$-a\sin x-b\cos x+a\cos x-b\sin x-2a\sin x-b\cos x=5\sin x$$

$$(a-3b)\cos x-(b+3a+5)\sin x=0$$

$$a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}.$$

Отсюда ответ: $\boxed{y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-\frac{1}{9}(3x^2+2x)e^{-2x}-\frac{1}{2}(3\sin x+\cos x)}$.

С 8.57. Решим $y''-2y'+5y=4\cos x+2\sin x$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^2-2\lambda+5=0$, откуда решение соответствующего однородного уравнения $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x$. Затем ищем частное решение исходного уравнения в виде $y=a\sin x+b\cos x$:

$$-a\sin x-b\cos x-2(a\cos x-b\sin x)+5(a\sin x+b\cos x)=4\cos x+2\sin x$$

$$(2b-2+4a)\sin x-(2a-4b+4)\cos x=0$$

$$a=0, b=1$$

Отсюда ответ: $\boxed{y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x+\cos x}$.

С 8.59. Решим $y''+y'-6y=-5e^{-3x}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-6=0$, откуда решение соответствующего однородного уравнения $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$. Ищем частное решение исходного уравнения в виде $y=axe^{-3x}$:

$$ae^{-3x}-3axe^{-3x}-3ae^{-3x}-3(ae^{-3x}-3axe^{-3x})-6axe^{-3x}=-5e^{-3x}$$

$$a=1$$

Отсюда ответ: $\boxed{y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+xe^{-3x}}$.

С 8.62. Решим $y''-2y'-3y=4\cos x-2\sin x+4e^{3x}$. Характеристическое уравнение есть $\lambda^2-2\lambda-3=0$, откуда решение соответствующего однородного уравнения получается $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. Теперь, ищем решение уравнения $y''-2y'-3y=4\cos x-2\sin x$ в виде $y=a\sin x+b\cos x$:

$$-a\sin x-b\cos x-2a\cos x+2b\sin x-3a\sin x-3b\cos x=4\cos x-2\sin x$$

$$(2b-4a+2)\sin x-(2a+4+4b)\cos x=0$$

$$a=0, b=-1.$$

Также, ищем решение уравнения $y''-2y'-3y=4e^{3x}$ в виде $y=axe^{3x}$:

$$-2(ae^{3x}+3axe^{3x})+3ae^{3x}+3(ae^{3x}+3axe^{3x})-3axe^{3x}=4e^{3x}$$

$$-2a+3a+3a=4, a=1$$

Отсюда ответ: $\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \cos x + x e^{3x}}$.

С 8.154. Решим $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$. Решение соответствующего однородного уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Теперь, приняв $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ за функции решим систему

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$$C_2' = \frac{1}{e^x(1+e^x)}, C_1' = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$C_1 = \int -\frac{dx}{1+e^x} = \int -\frac{de^x}{e^x(1+e^x)} = -\int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right) de^x = -\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \widetilde{C_1}$$

$$C_2 = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right) dx = -e^{-x} - \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \widetilde{C_2}$$

$$y = \left(-\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \widetilde{C_1}\right) e^x + \left(-e^{-x} - \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + \widetilde{C_2}\right) e^{2x}$$

$$\boxed{y = \widetilde{C_1} e^x + \widetilde{C_2} e^{2x} - e^x - (x - \ln(1+e^x))(e^x + e^{2x})}.$$

С 8.162. Решим $y'' + 3y' = \frac{3x-1}{x^2}$. Из характеристического уравнения найдем общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$. Варьируем постоянные:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-3x} = 0 \\ -3C_2' e^{-3x} = \dfrac{3x-1}{x^2} \end{cases}.$$

$$C_1' = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2} \Leftrightarrow C_1 = \ln|x| + \frac{1}{3x} + \widetilde{C_1}$$

$$C_2 = \int -e^{3x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2}\right) dx = -\frac{e^{3x}}{3x} + \widetilde{C_2}$$

$$y = \ln|x| + \frac{1}{3x} + \widetilde{C_1} - \frac{1}{3x} + \widetilde{C_2} e^{-3x}$$

$$\boxed{y = \widetilde{C_1} + \widetilde{C_2} e^{-3x} + \ln|x|}.$$

С 8.196. Решим $x^2 y'' + xy' + y = 10x^2$. Заменим $x = e^t$ $(x > 0)$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{y} = y' e^t \\ \ddot{y} = y'' e^{2t} + \dot{y} e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = e^{-t} \dot{y} \\ y'' = e^{-2t} \ddot{y} - e^{-2t} \dot{y} \end{cases}$$

Уравнение принимает вид $\ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} + y = 10e^{2t}$ или $\ddot{y} + y = 10e^{2t}$. Решение соответствующего однородного уравнения: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Частное решение ищем в виде $y = ae^{2t}$:

$$4ae^{2t} + ae^{2t} = 10e^{2t} \Leftrightarrow a = 2$$

$$\boxed{y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + 2x^2}.$$

С 8.201. Решим $x^2y'' - 6y = -16x^2\ln x$. Заменим $x = e^t$ $(x > 0)$. Тогда уравнение станет $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = -16e^{2t}t$. Решение соответствующего однородного уравнения: $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$. Ищем частное решение в виде $y = e^{2t}(at + b)$:

$$e^{2t}(4at + 4b + 2a + 2a) - e^{2t}(2at + 2b + a) - e^{2t}(6at + 6b) = -16e^{2t}t$$

$$(16 - 4a)t + 3a - 4b = 0$$

$$a = 4, \quad b = 3$$

$$y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} + (4t + 3)e^{2t}$$

$$\boxed{y = \frac{C_1}{x^2} + C_2x^3 + (4\ln x + 3)x^2}.$$

Ф 613. Построим линейное однородное уравнение, частным решением которого является $y = x^2e^x$:

$$y' = (2x + x^2)e^x$$

$$y'' = (2 + 4x + x^2)e^x$$

$$y''' = (6 + 6x + x^2)e^x$$

Ищем уравнение в виде $y''' + ay'' + by' + cy = 0$. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 6 + 4a + 2b = 0 \\ 6 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$.

Ф 615. Построим линейное однородное уравнение, частным решением которого является $y = x\sin x$:

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -3\sin x - x\cos x$$

$$y^{(4)} = -4\cos x + x\sin x$$

Ищем решение в виде $y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + dy = 0$. Тогда для коэффициентов получим следующему систему:

$$\begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4 + 2b = 0 \\ 1 - b + d = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{y^{(4)} + 2y'' + y = 0}$.

Ф 617. Построим линейное однородное уравнение, частными решениями которого являются $y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x}$:

$$y_1' = (x+1)e^x, y_1'' = (x+2)e^x, y_1''' = (x+3)e^x$$

$$y_2' = -e^{-x}, y_2'' = e^{-x}, y_2''' = -e^{-x}$$

Ищем уравнение в форме $y''' + ay'' + by' + cy = 0$. Подставив в это уравнение функции y_1 и y_2 получим следующую систему:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ -1 + a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{y''' - y'' - y' + y = 0}$.

Т 1. Сначала решим уравнение $y'' + ay = \sin x$. Рассмотрим три случаи.

Случай 1: $a < 0$. Из характеристического уравнения $\lambda^2 + a = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-a}$ находим общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^{-\sqrt{-a}} + C_2 e^{\sqrt{-a}}$. Частное решение ищем в виде $y = A\sin x + B\cos x$:

$$-(A\sin x + B\cos x) + a(A\sin x + B\cos x) = \sin x$$

$$A = \frac{1}{a-1}, \quad B = 0$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-\sqrt{-a}x} + C_2 e^{\sqrt{-a}x} + \frac{\sin x}{a-1}}.$$

Случай 2: $a = 0$. $y'' = \sin x \Leftrightarrow y' = -\cos x + C_1 \Leftrightarrow \boxed{y = -\sin x + C_1 x + C_2}$.

Случай 3: $a > 0$. Из характеристического уравнения находим $\lambda = \pm i\sqrt{a}$ и $y = C_1 \sin\sqrt{a}x + C_2\cos\sqrt{a}x$. Если $a \neq 1$, то снова ищем частное решение в виде $A\sin x + B\cos x$ и находим $y = \frac{\sin x}{a-1}$, откуда получаем решение

$$\boxed{y = C_1 \sin\sqrt{a}x + C_2\cos\sqrt{a}x + \frac{\sin x}{a-1}}.$$

Если же $a = 1$, то ищем частное решение в виде $y = x(A\sin x + B\cos x)$:

$$-x(A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x - B\sin x) + x(A\sin x + B\cos x) = \sin x$$

$$(2A + B)\cos x + (A - 2B - 1)\sin x = 0$$

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$$

$$\boxed{y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{x}{5}(\sin x - 2\cos x)}.$$

а) При $a \neq 1$ уравнение имеет ограниченное решение $y = \frac{\sin x}{a-1}$ при $a < 0$ и $a > 0$, и ограниченное решение $y = -\sin x$ при $a = 0$. При $a = 1$ уравнение не имеет ограниченных решений.

б) При $a \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$ уравнение имеет ровно одно периодическое решение $y = \frac{\sin x}{a-1}$, при $a = 0$ – бесконечно много периодических решений $y = -\sin x + C$, а при $a = 1$ – нет периодических решений.

С 11.2. Решим

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y \\ \dot{y} = 18x - 11y \end{cases}.$$

$$\ddot{x} = 10\dot{x} - 6\dot{y} = 10\dot{x} - 108x + 66y = 10\dot{x} - 108x + 11(10x - \dot{x}) = 2x - \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t} \Longrightarrow y = 2C_1 e^{-2t} + \frac{3}{2} C_2 e^{t}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{C_2}{2} e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

С 11.8. Решим

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y \\ \dot{y} = 5x + 5y \end{cases}.$$

$$\ddot{y} = 5\dot{x} + 5\dot{y} = 5\dot{y} - 25x - 50y = 5\dot{y} - 50y - 5\dot{y} + 25y = -25y$$

$$\ddot{y} + 25y = 0 \Leftrightarrow y = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = -C_1(\cos 5t + \sin 5t) + C_2(\cos 5t - \sin 5t)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\cos 5t - \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 5t - \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}}.$$

С 11.13. Решим

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -4x + 2y \end{cases}.$$

$$\ddot{x} = -2\dot{x} + \dot{y} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = C_1 \Leftrightarrow x = C_1 t + C_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = \dot{x} + 2x = 2C_1 t + C_1 + 2C_2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

С 11.13. Решим

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z. \\ \dot{z} = -6x - 2y - z \end{cases}$$

Найдем собственные числа и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -1 \\ -6 & 2 - \lambda & -2 \\ -6 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1) + 24 - 12 + 6(\lambda-2) + 4(\lambda+2) - 12(\lambda+1) =$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = -2 \to h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 0 \to h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 1 \to h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

C 11.31. Решим

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z \\ \dot{y} = 2x + y + 2z. \\ \dot{z} = 2x + 2y + z \end{cases}$$

Найдем собственные числа и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 16 - 12(1-\lambda) = (5-\lambda)(1+\lambda)^2$$

Собственному числу $\lambda = 5$ соответствует вектор $h_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$, а $\lambda = -1$ – два вектора

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

C 11.44. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + z \\ \dot{z} = -x - y + 2z \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 1 + 1 - \lambda + 2 - \lambda = -(\lambda-1)((\lambda-1)^2 + 1)$$

Получаем собственные значения $1, 1 \pm i$. Значению $\lambda = 1$ соответствует собственный вектор $h_1 = (1 \quad 0 \quad 1)^T$. Для $\lambda = 1 + i$ получаем

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -1-i & 1 \\ -1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -1-i & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -1-i & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ -1 & -i & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -i & 0\\ -1 & -i & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

значит собственным будет вектор

$$h_2=\begin{pmatrix}-i\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}i.$$

Отсюда

$$e^{(1+i)t}h_2=e^t(\cos t+i\sin t)\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}i\right)=e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \sin t\end{pmatrix}i$$

и ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \sin t\end{pmatrix}}.$$

С 11.71. Решим систему

$$\begin{cases}\dot{x}=-2y-2z\\ \dot{y}=3x+5y+3z.\\ \dot{z}=-x-2y-z\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 3 & 5 & 3\\ -1 & -2 & 31\end{pmatrix},\quad \det(A-\lambda E)=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-5)+6+12-6\lambda-6\lambda-6+2\lambda-10=$$

$$=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=-(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

При $\lambda=1$

$$A-\lambda E\sim\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda E)h_2=h_1$$

$$(A-\lambda E|h_1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & -2 & 2\\ 3 & 4 & 3 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & -2 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda=2$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 3 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Значит ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix}+C_2e^t\left(\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\end{pmatrix}\right)+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}.$$

С 11.76. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + z \\ \dot{y} = -x - 2y + 3z. \\ \dot{z} = -y + z \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) + 1 - 3\lambda - 6 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}.$$

С 11.90. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y - 15z \\ \dot{y} = x + 3y - 5z \\ \dot{z} = z + 2y - 4z \end{cases}.$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 16) - 30 - 30 - 15\lambda + 45 + 40 - 10\lambda + 6\lambda + 24 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Второй собственный вектор мы выбрали таким образом, чтобы его жорданова цепочка была невырожденной:

$$(A - E|h_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim (1 \quad 2 \quad -5|1) \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}.$$

С 11.138. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t \\ \dot{y} = x - y - e^t \end{cases}.$$

Сначала решим соответствующую однородную систему:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2 + 2^2$$

$$A - (2-2i)E = \begin{pmatrix} 1+2i & -5 \\ 1 & -1+2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+2i & -5 \\ 1+2i & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$$

$$e^{(2-2i)t} h_1 = e^{2t}(\cos 2t - i \sin 2t)\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i\right) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -5\sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -5\sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Ищем частное решение в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}: \quad \begin{cases} a = 3a - 5b - 2 \\ b = a - b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -5\sin 2t \\ 2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t}.$$

С 11.154. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9$$

$$A - 3iE = \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$e^{3it} h_1 = (\cos 3t + i \sin 3t)\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Ищем частное решение в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t\right) e^t:$$

$$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t = A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = a - 2b \\ b + d + 6 = 5a - b \\ c + 2 = c - 2d \\ d + 2 = 5c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} e^t}.$$

С 11.178. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} \\ \dot{y} = 10x + 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 10 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow A - \lambda E = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \Longrightarrow A - \lambda E = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) e^t h_1 + C_2 e^{2t} h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \\ y = -2C_1 e^t - 5C_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{C}_1 e^t + 2\dot{C}_2 e^{2t} = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} \\ -2\dot{C}_1 e^t - 5\dot{C}_2 e^{2t} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -2e^t & -5e^{2t} \end{vmatrix} = -e^{3t}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} & 2e^{2t} \\ 0 & -5e^{2t} \end{vmatrix} = -\frac{5e^{4t}}{1+e^t}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^t & \dfrac{e^{2t}}{1+e^t} \\ -2e^t & 0 \end{vmatrix} = \frac{2e^{3t}}{1+e^t}$$

$$\dot{C}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5e^t}{1+e^t}, \quad \dot{C}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{1+e^t}$$

$$C_1 = \int \frac{5e^t}{1+e^t} dt = 5 \int \frac{d(1+e^t)}{1+e^t} = 5\ln(1+e^t) + \widetilde{C_1}$$

$$C_2 = \int -\frac{2}{1+e^t} dt = -2 \int \frac{de^t}{(1+e^t)e^t} = -2 \int \left(\frac{1}{e^t} - \frac{1}{1+e^t} \right) de^t = 2\ln(1+e^{-t}) + \widetilde{C_2}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \widetilde{C_1} e^t + 2\widetilde{C_2} e^{2t} + 5e^t \ln(1+e^t) + 4e^{2t} \ln(1+e^{-t}) \\ y = -2\widetilde{C_1} e^t - 5\widetilde{C_2} e^{2t} - 10e^t \ln(1+e^t) - 10e^{2t} \ln(1+e^{-t}) \end{cases}}.$$

С 11.118. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad e^{At} = S e^{Bt} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}.$$

Найдем решение при условии $x(0) = y(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

С 11.125. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит

$$e^{At} = E + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & t \\ -t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}.$$

Найдем решение при условии $x(0) = y(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{pmatrix}.$$

С 11.127. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -5x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$$

$$A - (-1 \pm i)E = \begin{pmatrix} 2 \mp i & 1 \\ -5 & -2 \mp i \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} -1 \\ \mp i + 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = Se^{Bt}S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -i+2 & i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} S^{-1} =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2i} \begin{pmatrix} -e^{it} & -e^{-it} \\ (2-i)e^{it} & (2+i)e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ -2+i & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2i}\begin{pmatrix} -(2+i)e^{it} - (-2+i)e^{-it} & -e^{it} + e^{-it} \\ 5e^{it} - 5e^{-it} & (2-i)e^{it} - (2+i)e^{-it} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2i}\begin{pmatrix} -2i\cos t - 4i\sin t & -2i\sin t \\ 10i\sin t & -2i\cos t + 4i\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}.$$

При $x(0) = y(0) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + 3\sin t) \\ e^{-t}(\cos t - 7\sin t) \end{pmatrix}.$$

Т 2. Решим задачу Коши $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, где $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\bar{x}(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t))^T$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2t^2}{2} & -\frac{a^2t^2}{2} & at \\ \frac{a^2t^2}{2} & 1 - \frac{a^2t^2}{2} & at \\ at & -at & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{C}$, $\bar{C} \in \mathbb{R}^3$, то из условия $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ получаем $\bar{x}_0 = \bar{C}$ и ответ: $\boxed{\bar{x} = e^{At}\bar{x}_0}$.

Т 3. Докажем формулу $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$. Пусть J – нормальная жорданова форма матрицы A, причем $A = SJS^{-1}$. Тогда из курса линейной алгебры известно, что $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} J$, и, следовательно, $e^{\operatorname{tr} A} = e^{\operatorname{tr} J}$. С другой стороны, $\det e^A = \det Se^JS^{-1} = \det S \det e^J \det S^{-1} = \det e^J$. Значит наша задача эквивалентна доказательству формулы $\det e^J = e^{\operatorname{tr} J}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A с соответствующими кратностями $k_1, \dots, k_n$. Тогда $\operatorname{tr} J = \lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_n k_n$. Также, матрица e^J – верхняя треугольная, значит ее определитель равен произведению чисел главной диагонали, т.е. $\det e^J = \underbrace{e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_1}}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{e^{\lambda_n} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n}}_{k_n} = e^{\lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_n k_n}$. Итак, равенство доказано.

С 8.172. Решим задачу Коши уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$$

при условии $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. При преобразовании Лапласа $y(t) \mapsto \tilde{y}(p)$, $y'(t) \mapsto p\tilde{y}(p)$, $y''(t) \mapsto p^2\tilde{y}(p) - 1$, $e^{-t} \mapsto (p+1)^{-1}$ наше уравнение переходит в

$$p^2\tilde{y} - 1 - 3p\tilde{y} + 2\tilde{y} = \frac{1}{p+1}$$

$$\tilde{y} = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} =$$

$$= \frac{A(p-1)(p-2) + B(p+1)(p-2) + C(p+1)(p-1)}{(p+1)(p-1)(p-2)}.$$

Многочлены в знаменателях равны, поэтому подставив в них значения $p = -1, 1, 2$ находим

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = \frac{4}{3}.$$

При обратном преобразовании Лапласа

$$\frac{1}{p+1} \longmapsto e^{-t}, \quad \frac{1}{p-1} \longmapsto e^{t}, \quad \frac{1}{p-2} \longmapsto e^{2t}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t}}.$$

С 11.196. Решим задачу Коши системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^{2t} \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2e^{2t} \end{cases}$$

при условии $x(0) = y(0) = 1$. Если при преобразовании Лапласа $x(t) \longmapsto \tilde{x}(p)$, $y(t) \longmapsto \tilde{y}(p)$, то $\dot{x}(t) \longmapsto p\tilde{x}(p) - 1$, $\dot{y}(t) \longmapsto p\tilde{y}(p) - 1$, также $e^{2t} \longmapsto (p-2)^{-1}$. Тогда наша система эквивалентна

$$\begin{cases} p\tilde{x} - 1 = -\tilde{x} - \tilde{y} + \dfrac{1}{p-2} \\ p\tilde{y} - 1 = 2\tilde{x} + 2\tilde{y} + \dfrac{2}{p-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p+1)\tilde{x} + \tilde{y} = \dfrac{p-1}{p-2} \\ 2\tilde{x} + (2-p)\tilde{y} = -\dfrac{p}{p-2} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ 2 & 2-p \end{vmatrix} = p(1-p)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{p-1}{p-2} & 1 \\ \dfrac{p}{2-p} & 2-p \end{vmatrix} = 1 - p + \frac{p}{p-2} = \frac{p^2-4p+2}{2-p}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & \dfrac{p-1}{p-2} \\ 2 & \dfrac{p}{2-p} \end{vmatrix} = \frac{p(p+1)}{2-p} + \frac{2(p-1)}{2-p} = \frac{p^2+3p-2}{2-p}$$

Применяя правилу Крамера и метод неопределенных коэффициентов находим

$$\tilde{x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} = \frac{A(p-1)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-1)}{p(p-1)(p-2)}$$

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1.$$

При обратном преобразовании Лапласа

$$\frac{1}{p} \longmapsto 1, \quad \frac{1}{p-1} \longmapsto e^{t}, \quad \frac{-1}{p-2} \longmapsto -e^{2t}$$

$$\boxed{x = 1 + e^t - e^{2t}}.$$

Аналогично

$$\tilde{y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p^2 + 3p - 2}{p(p-1)(p-2)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p-1} + \frac{F}{p-2} = \frac{D(p-1)(p-2) + Ep(p-2) + Fp(p-1)}{p(p-1)(p-2)}$$

$$D = -1, \quad E = -2, \quad F = 4$$

$$\boxed{y = -1 - 2e^t + 4e^{2t}}.$$

I. Задача Коши.

P 5.26 (a) $y' = x^2 + y^3$. Правая часть непрерывна, ее производная $3y^2$ по y непрерывна, значит для любой точки (x_0, y_0) существует единственное решение этого уравнения, проходящее через (x_0, y_0).

(б) $y'' = x^2 + y^3$. По теореме существования и единственности касание двух интегральных кривых решений данного уравнения невозможно, поскольку каждая тройка (x_0, y_0, y_0') определяет единственное решение.

(в) $y''' = x^2 + y^3$. Теорема существования и единственности не запрещает двум интегральным кривым решений данного уравнения касаться, поскольку теорема только гарантирует единственность решения, проходящего через (x_0, y_0, y_0', y_0'').

P 5.28 (a) $y^{(n)} = f(x, y), \quad f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2_{xy}). \quad y_1 = x, \quad y_2 = x + x^2$

Поскольку графики функций y_1 и y_2 пересекаются в точке $(0, 0)$ и имеют общую касательную, то по теореме существования и единственности при $n < 3$ исходное уравнение имеет единственное решение при данных начальных условиях. Значит при $n \geq 3$ теорема о существования и единственности не запрещает исходному уравнению иметь две данные решения.

P 6.36. Решим $2xy^2y'^2 - y^3y' + 1 = 0$. Заменим $p = y'$, тогда $dy = pdx$, $2xy^2p^2 - y^3p + 1 = 0$

$$x = \frac{y^3p - 1}{2y^2p^2}$$

$$dx = \frac{2y^2p^2(3y^2pdx + y^3dp) - 2(y^3p - 1)(2yp^2dx + 2y^2pdp)}{4y^4p^4}$$

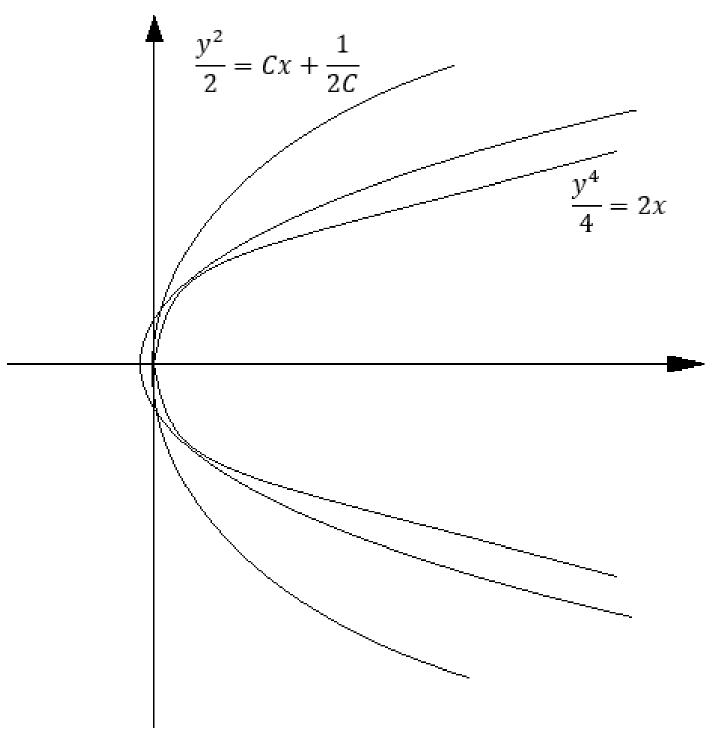
$$2y^4p^4dx = y^2p^2(3y^2p^2dx + y^3dp) - (y^3p - 1)(2yp^3dx + 2y^2pdp)$$

$$(-y^4p^4 + 2yp^3)dx + (-y^5p^2 + 2y^2p)dp = 0$$

$$yp(2 - y^3p)(p^2dx + ydp) = 0$$

$p = 0 \Longrightarrow y = C \rightarrow 2xC^2 \cdot 0 - C^3 \cdot 0 + 1 = 0$ — нет решений;

$$y^3p = 2 \Leftrightarrow y^3dy = 2dx \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} = 2x + C$$



$$\to \left(\frac{y^4}{4} - C\right) y^2 \cdot \frac{4}{y^6} - y^3 \cdot \frac{2}{y^3} + 1 = 0 \to C = 0, \boxed{\frac{y^4}{4} = 2x}$$

$$p^2 dx + ydp \Leftrightarrow pdy + ydp = 0 \Leftrightarrow yp = C \Leftrightarrow ydy = Cdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = Cx + C_1$$

$$p = \frac{C}{y}, x = \left(\frac{y^2}{2} - C_1\right)\frac{1}{C} \to \frac{2}{C}\left(\frac{y^2}{2} - C_1\right) y^2 \cdot \frac{C^2}{y^2} - y^3 \cdot \frac{C}{y} + 1 = 0 \to C_1 = \frac{1}{2C}, \boxed{\frac{y^2}{2} = Cx + \frac{1}{2C}}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по C находим особое решение:

$$0 = x - \frac{1}{2C^2} \to \frac{y^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2x}} x + \frac{1}{2}\sqrt{2x} \to \boxed{\frac{y^4}{4} = 2x}.$$

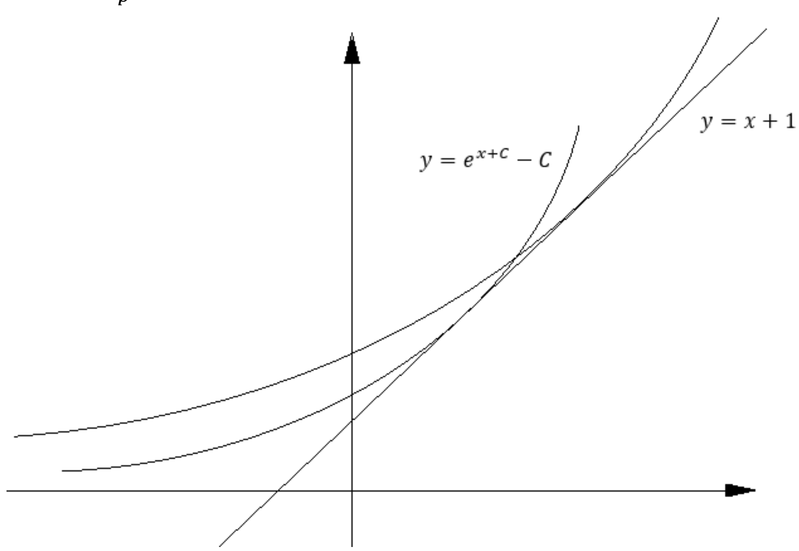
Р 6.49. Решим $y' - \ln y' = y - x$. После замены $p = y'$ имеем $p - \ln p = y - x$, $dp - \frac{1}{p} dp = dy - dx$ и $dy = pdx$. Значит

$$\frac{p-1}{p} dp = pdx - dx \iff (p-1)\left(\frac{dp}{p} - dx\right) = 0.$$

При $p = 1$ имеем $y' = 1 \implies y = x + C$. Подставив это в исходное уравнение получаем $1 = C$, $\boxed{y = x + 1}$. В противном случае

$$\frac{dp}{p} = dx \iff \ln p = x + C \iff p = e^{x+C} \implies y = e^{x+C} + C_1.$$

Подставив y в исходное уравнение, найдем $e^{x+C} - x - C = e^{x+C} + C_1 - x \iff C_1 = -C$, $\boxed{y = e^{x+C} - C}$. Найдем особые решения: $1 - \frac{1}{p} = 0, p = 1 \implies y = x + 1$.



Ф 1065. $y' = 2x + \mu y^2$, $y(0) = \mu - 1$. Найдем $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$. Если $y = y(x, \mu)$ решение задачи, то дифференцируя по параметру μ имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,\mu)}{\partial x} = y^2(x,\mu) + 2\mu y(x,\mu) u(x,\mu) \\ u(0,\mu) = 1, \qquad u(x,\mu) = \dfrac{\partial y(x,\mu)}{\partial \mu} \end{cases}.$$

Полагая $\mu = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = y^2(x,0), \\ u(0,0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

где $y(x,0)$ — решение задачи $y'(x,0) = 2x$, $y(0,0) = -1$. Очевидно, $y(x,0) = x^2 - 1$. Значит система $(*)$ принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = x^4 - 2x^2 + 1 \\ u(0,0) = 1 \end{cases}.$$

Отсюда находим

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = u(x,0) = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x + 1.$$

Ф 1066. $y' = y + y^2 + xy^3$, $y(2) = y_0$. Найдем $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$. Если $y = y(x, y_0)$ решение задачи, то дифференцируя по параметру y_0 имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y_0)}{\partial x} = u(x,y_0) + 2y(x,y_0)u(x,y_0) + 3xy^2(x,y_0)u(x,y_0) \\ u(2,y_0) = 1, \qquad u(x,y_0) = \dfrac{\partial y(x,y_0)}{\partial y_0} \end{cases}.$$

Пологая $y_0 = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0) + 2y(x,0)u(x,0) + 3xy^2(x,0)u(x,0), \\ u(2,0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

где $y(x,0)$ — существующее и единственное решение задачи

$$y'(x,0) = y(x,0) + y^2(x,0) + xy^3(x,0), \qquad y(2,0) = 0.$$

Понятно, что $y(x,0) \equiv 0$. Значит система $(*)$ принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = u(x,0) \\ u(2,0) = 1 \end{cases}.$$

Отсюда находим $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = u(x,0) = e^{x-2}$.

Ф 1067. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}$, $x(1) = 1$. Найдем $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$. Если $x = x(t,\mu)$ решение задачи, то дифференцируя по параметру μ имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\mu)}{\partial t} = \dfrac{u(t,\mu)}{t} + te^{-x(t,\mu)} - \mu t e^{-x(t,\mu)} u(t,\mu) \\ u(1,\mu) = 0, \qquad u(t,\mu) = \dfrac{\partial u(t,\mu)}{\partial \mu} \end{cases}.$$

Пологая $\mu = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,0)}{\partial t} = \dfrac{u(t,0)}{t} + te^{-x(t,0)}, \\ u(1,0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

где $x(t,0)$ решение задачи

$$\frac{dx(t,0)}{dt}=\frac{x(t,0)}{t},\qquad x(1,0)=1.$$

Очевидно, $x(t,0)=t$. Значит система $(*)$ принимает вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial t}=\dfrac{u(t,0)}{t}+te^{-t}\\ u(1,0)=0\end{cases}.$$

$$\dot{u}=\frac{u}{t}+te^{-t},\qquad u=C(t)t,\qquad C't=te^{-t},\qquad C(t)=-e^{-t},\qquad u=t(-e^{-t}+C_1),\qquad C_1=e^{-1}$$

откуда находим

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=u(x,0)=t(e^{-1}-e^{-t}).$$

Т 1. Докажем, что при $\alpha>1$ любое нетривиальное решение $y'=|y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty,+\infty)$. Рассмотрим верхнюю полуплоскость $y>0$. Заметим, что при $\alpha>1$ правая часть уравнения $y'=|y|^\alpha$ удовлетворяет условию Липшица по y. Значит, по теореме существования и единственности его решения не пересекаются. Так как $y=0$ решение, то для любого другого решения верно, что оно либо целиком лежит в полуплоскости $y>0$, либо в полуплоскости $y<0$. В верхней полуплоскости имеем

$$y'=y^\alpha,\ \ y^{-\alpha}dy=dx,\ \ \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=x+C,\ \ \ y=[(1-\alpha)(x+C)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

При $x=C$ это решение имеет асимптоту, а значит не может быть продолжено на $(-\infty,+\infty)$. В нижней полуплоскости все аналогично.

Т 2. Рассмотрим уравнение $p^2-(y+1)p+y=0$, где $p=y'$. Находим дискриминантную кривую: $2p-(y+1)=0\wedge(p-1)(p-y)=0\to y=1$. Решим уравнение:

$$p-1=0\to y=x+C_1,\ \ \ p-y=0\to y=C_2e^x.$$

Дискриминантная кривая $y=1$ — множество точек, в которых линии семейства $y=x+C_1$ касаются линиям семейства $y=C_2e^x$. Действительно, для кривых первого семейства имеем $y'\equiv 1$, а для кривых второго семейства в точках касания — $y=C_2e^x=(C_2e^x)'=y'=1$.

Заметим, что решения данного уравнения, это не только кривые $y=x+C_1$, $y=C_2e^x$, но и кривые, составленные из двух кусков этих прямых. Важно, чтобы точка соединения этих линий лежала на дискриминантной кривой $y=1$, т.к. только в таком случае функция

$$y=\begin{cases}x+C_1, x<x_0\\ C_2e^x, x\geq x_0\end{cases}$$

будет дифференцируемой. Решим краевую задачу

$$\begin{cases}p^2-(y+1)p+y=0\\ y(0)=0, y(2)=e\end{cases}.$$

Поскольку никакая функция из семейств $y=x+C_1$, $y=C_2e^x$ не является решением задачи, то нужно рассмотреть “составное” решение. Если сначала идет $y=C_2e^x$, то из условия $y(0)=0$ получаем $C_2=0$ и $y\equiv 0$, а значит условие $y(2)=e$ не выполняется. Значит, сначала идем по прямой $y=x$ ($C_1=0$ из условия $y(0)=0$), доходим до прямой $y=1$ (в $x=1$) и “пересаживаемся” на кривую C_2e^x, где $(C_2e^x)'=1$ в точке $x=1$. Получаем $C_2e=1$, $C_2=e^{-1}$ и

$$y=\begin{cases}x, x\leq 1\\ e^{x-1}, x>1\end{cases},$$

при этом условие $y(2)=e$ выполнено.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Ф 649. Докажем, что функции x, e^x, xe^x — ЛНЗ на $(-\infty, +\infty)$. Предположим противное. Тогда $\exists C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \neq 0$ такие, что $C_1x + C_2e^x + C_3xe^x \equiv 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Подставив $x = 0$ получаем $C_2 = 0$. Значит $C_1x + C_3xe^x \equiv 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ и $C_1 + C_3e^x \equiv 0\ \forall x \neq 0$, которое невозможно. Значит функции x, e^x, xe^x линейно независимы.

Ф 664. Если для детерминанта Вронского $W(x)$ функций $y_1, \dots, y_n$ известно, что $W(x_0) = 0$, $W(x_1) \neq 0$. То эти функции ЛНЗ. Действительно, в противном случае имели бы, что в произвольной точке $W(x) = 0$, что противоречило бы условию $W(x_1) \neq 0$.

Ф 668. Докажем, что два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами), имеющие максимум при одном и том же значении x_0, линейно зависимы. Действительно, берем числа $C_1, C_2, C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ так, чтобы

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0.$$

С другой стороны, по условию

$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0.$$

Значит, функция $y(x) = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0)$ удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ задачи Коши

$$y'' = -p(x)y' + q(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

которое имеет единственное решение в силу непрерывности функций $p(x)$ и $q(x)$. Этим решением является функция $y = 0$. Значит $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0\ \forall x$, что и нужно было доказать.

Ф 673. Выясним, линейное однородное уравнения какого порядка может иметь на $(0, 1)$ четыре частных решения: $y_1 = x^2 - 2x + 2$, $y_2 = (x-2)^2$, $y_3 = x^2 + x - 1$, $y_4 = 1 - x$. Заметим, что

$$y_1 + Ay_2 + (-1 - A)y_3 + (-3 - 5A)y_4 = 0\ \forall A \in \mathbb{R}.$$

Значит искомая степень уравнения не больше 2. Но

$$W[y_3, y_4] = \begin{vmatrix} x^2 + x - 1 & 1 - x \\ 2x + 1 & -1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x \not\equiv 0.$$

Значит степень также не меньше 2. В качестве уравнения можно взять

$$\begin{vmatrix} y & x^2 + x - 1 & 1 - x \\ y' & 2x + 1 & -1 \\ y'' & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2 - 2x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0.$$

Ф 678. Составим линейное однородное дифференциальное уравнение возможно меньшего порядка, имеющее частные решения e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Очевидно, эти функции ЛЗ. Значит степень искомого уравнения не больше 2. С другой стороны

$$W[\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x] = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Т.е. степень уравнения не меньше 2. В качестве уравнения можно брать

$$\begin{vmatrix} y & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ y' & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ y'' & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{y'' - y = 0}.$$

Р 9.10. Решим уравнение

$$2xy'' + (4x + 1)y' + (2x + 1)y = e^{-x}, x > 0.$$

Ищем частное решение однородного уравнения в виде $y = e^{\alpha x}$:

$$2x\alpha^2 e^{\alpha x} + (4x+1)\alpha e^{\alpha x} + (2x+1)e^{\alpha x} = 0$$

$$(2\alpha^2 + 4\alpha + 2)x + \alpha + 1 = 0.$$

$\alpha = -1$, очевидно, удовлетворяет последнему уравнению. Значит $y_1 = e^{-x}$ частное решение однородного уравнения. По формуле Лиувилля-Остроградского

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & y \\ -e^{-x} & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int \frac{4x+1}{2x} dx} \Leftrightarrow y'e^{-x} + ye^{-x} = C_1 e^{-2x - \frac{1}{2}\ln x + C_2}$$

$$y'e^{-x} + ye^{-x} = C_0 \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y' + y = C_0 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow y = Ce^{-x}$$

$$y = C(x)e^{-x}, \quad C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = C_0 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

$$C' = \frac{C_0}{\sqrt{x}}, \quad C = 2C_0\sqrt{x} + C_1, \quad y = 2C_0\sqrt{x}e^{-x} + C_1 e^{-x}, 2C_0 \to C_2$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2'\sqrt{x}e^{-x} = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2'\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

$$\frac{C_2' e^{-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{2x}, \quad C_2' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad C_2 = 2\sqrt{x} + \widetilde{C_2}$$

$$C_1' = -1, \quad C_1 = -x + \widetilde{C_1}$$

$$\boxed{y = e^{-x}\left(x + \widetilde{C_1} + \widetilde{C_2}\sqrt{x}\right)}.$$

Р 9.31. Решим уравнение

$$(\ln x)y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \ln^2 x.$$

В качестве частного решения однородного уравнения возьмем $y_1 = x$.

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{1}{x\ln x} dx} \Leftrightarrow y'x - y = C_1 e^{\ln\ln x} = C_1 \ln x$$

$$y'x - y = 0, \quad y = Cx$$

$$C'x^2 = C_1 \ln x, \quad C = C_1 \int \frac{\ln x}{x^2} dx = C_1 \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x - 1}{x^2}\right) dx = C_1\left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) + C_2$$

$$y = C_1(-1 - \ln x) + C_2 x$$

$$\begin{cases} -C_1'(1 + \ln x) + C_2' x = 0 \\ -\frac{C_1'}{x} + C_2' = \ln x \end{cases}$$

$$-C_1' + C_2' x = x \ln x$$

$$C_1' \ln x = x \ln x, \quad C_1 = \frac{x^2}{2} + \widetilde{C_1}$$

$$C_2' = \ln x + 1, \quad C_2 = x\ln x + \widetilde{C_2}$$

$$\boxed{y=-\widetilde{C_1}(1+\ln x)+\widetilde{C_2}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\ln x}.$$

Р 9.53. Решим уравнение

$$x(x+1)y''+(4x+2)y'+2y=6(x+1).$$

Ищем частное решение однородного уравнения в виде $y=x^\alpha$:

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}(x+1)+\alpha x^{\alpha-1}(4x+2)+2x^\alpha=0$$

$$\begin{cases}\alpha(\alpha-1)+4\alpha+2=0\\ \alpha(\alpha-1)+2\alpha=0\end{cases}\to\alpha=-1$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & y\\ -\frac{1}{x^2} & y'\end{vmatrix}=Ce^{-\int\frac{4x+2}{x(x+1)}dx}\Leftrightarrow\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=Ce^{\int-\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}dx}=C_1e^{-2\ln x-2\ln(x+1)}=\frac{C_1}{x^2(x+1)^2}$$

$$xy'+y=0,\quad y=\frac{C}{x}$$

$$\frac{C'}{x^2}=\frac{C_1}{x^2(x+1)^2},\quad C'=\frac{C_1}{(x+1)^2},\quad C=-\frac{C_1}{x+1}+C_2,\quad y=-\frac{C_1}{x(x+1)}+\frac{C_2}{x}$$

$$\begin{cases}-\frac{C_1'}{x(x+1)}+\frac{C_2'}{x}=0\\ -C_1'\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{C_2'}{x^2}=\frac{6}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{C_1'}{x^2(x+1)}-\frac{C_2'}{x^2}=0\\ C_1'\frac{2x+1}{(x+1)^2x^2}-\frac{C_2'}{x^2}=\frac{6}{x}\end{cases}$$

$$\frac{C_1'}{(x+1)^2x}=\frac{6}{x},\quad C_1'=6(x^2+2x+1),\quad C_1=2x^3+6x^2+6x+\widetilde{C_1}$$

$$C_2'=6x+6,\quad C_2=3x^2+6x+\widetilde{C_2}$$

$$\boxed{y=-\frac{\widetilde{C_1}}{x(x+1)}+\frac{\widetilde{C_2}}{x}+\frac{x^2+3x}{x+1}}.$$

Р 13.64. Решим уравнение

$$x^2(x-3)y''-x^2(x-2)y'+2(x^2-3x+3)y=(x-3)^2.$$

Ищем частное решение однородного уравнения в форме x^n:

$$n(n-1)x^n(x-3)-nx^{n+1}(x-2)+2(x^2-3x+3)x^n=0$$

$$\begin{cases}n(n-1)+2n-6=0\\ -3n(n-1)+6=0\\ -n+2=0\end{cases}\Longrightarrow n=2.$$

$$\begin{vmatrix}x^2 & y\\ 2x & y'\end{vmatrix}=Ce^{\int\frac{x-2}{x-3}dx}=C_1e^{x+\ln(x-3)}$$

$$y'x^2-2yx=C_1e^x(x-3)$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)'=\frac{C_1e^x(x-3)}{x^4},\quad y=C_1\frac{e^x}{x}+C_2x^2$$

$$\begin{cases}\frac{C_1'e^x}{x}+C_2'x^2=0\\ C_1'\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)+C_2'\cdot 2x=\frac{x-3}{x^2}\end{cases}\qquad\begin{cases}C_1'\frac{2e^x}{x}+C_2'\cdot 2x^2=0\\ C_1'\left(e^x-\frac{e^x}{x}\right)+C_2'\cdot 2x^2=\frac{x-3}{x}\end{cases}$$

$$C_1'\left(e^x-\frac{3e^x}{x}\right)=\frac{x-3}{x},\quad C_1=-e^{-x}+\widetilde{C_1}$$

$$C_2'=-\frac{1}{x^3},\quad C_2=\frac{1}{2x^2}+\widetilde{C_2}$$

$$\boxed{y=\widetilde{C_1}\frac{e^x}{x}+\widetilde{C_2}x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}.$$

Р 13.68 (а) Составим и решим дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью $f(x)=1-x^2$ и с фундаментальной системой решений $y_1=x$, $y_2=x^2+1$ соответствующего однородного уравнения:

$$\begin{vmatrix} y & x & x^2+1 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix}=1-x^2$$

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=1-x^2$$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ y' & 1 \end{vmatrix}=Ce^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}=C_1(x^2-1)$$

$$y-y'x=C_1(x^2-1)$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)'=C_1\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\quad y=C_1(x^2+1)+C_2x$$

$$\begin{cases} C_1'(x^2+1)+C_2'x=0 \\ C_1'\cdot 2x+C_2'=-1 \end{cases},\quad C_1'\cdot 2x^2+C_2'x=-x$$

$$C_1'(1-x^2)=x,\quad C_1=\int\frac{xdx}{1-x^2}=-\frac{\ln|x^2-1|}{2}+\widetilde{C_1}$$

$$C_2'=\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1},\quad C_2=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\widetilde{C_2}$$

$$\boxed{y=\widetilde{C_1}(x^2+1)+\widetilde{C_2}x-\frac{(x^2+1)\ln|x^2-1|}{2}+x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+x^2}.$$

Т 3. Докажем, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=const$ на $(0,+\infty)$, не может иметь двух ЛНЗ решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными. Пусть это не так, пусть существуют ЛНЗ решения $y_1(x), y_2(x)$. Тогда

$$\exists x_0\in(0,+\infty)\colon W[y_1(x_0),y_2(x_0)]\neq 0,$$

и по формуле Лиувилля-Остроградского

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\xi}}=W(x_0)\frac{x_0}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}\infty,$$

которое невозможно, поскольку $|W(x)|=|y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)|\leq M$ по условию — противоречие.

III. Теорема Штурма.

Ф 726. По теореме Штурма о расстоянии межу соседними нулями имеем, что если d расстояние между соседними нулями уравнения $y'' + my = 0$, $m = const > 0$, то

$$\frac{\pi}{\sqrt{m}} \le d \le \frac{\pi}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow d = \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Отсюда на отрезке $[a, b]$ может содержатся $[(b-a)/d] = \left[(b-a)\sqrt{m}/\pi\right]$ нулей.

Р 10.2. Докажем, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{1}{4(x^2+1)}y = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ лишь конечное число нулей. Если это утверждение верно для промежутка $[1, +\infty)$, то тем более верно и для $[0, +\infty)$. От противного. Рассмотрим уравнение $z'' + \frac{1}{4x^2}z = 0$. Заменой $x(t) = e^t$ получаем $\dot{z} = z'e^t$, $\ddot{z} = z''e^{2t} + z'e^t$,

$$\frac{\ddot{z} - \dot{z}}{e^{2t}} + \frac{z}{4e^{2t}} = 0 \Leftrightarrow 4\ddot{z} - 4\dot{z} + z = 0,$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$$z = (C_1 t + C_2)e^{\frac{1}{2}t} = (C_1 \ln x + C_2)\sqrt{x}.$$

Нетривиальные решения последнего уравнения имеют лишь конечное число нулей. Значит по теореме Штурма исходное уравнение не может иметь нетривиальное решение с бесконечным числом нулей.

Р 10.3. Докажем, что каждое решение уравнения $z'' + \frac{1}{1+x^2}z = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ бесконечное число нулей. Если мы докажем это для $[1, +\infty)$, то для $[0, +\infty)$ утверждение будет тем более будет верным. Рассмотрим уравнение $y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0$. Решив его аналогичным образом, как сделано в предыдущей задаче получаем

$$\frac{\ddot{y} - \dot{y}}{e^{2t}} + \frac{y}{2e^{2t}} = 0 \Leftrightarrow 4\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 0,$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i,$$

$$y = \left(C_1 \cos\frac{1}{2}t + C_2 \sin\frac{1}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} = Ae^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}t + \omega\right)$$

Для последнего уравнения любое его решение имеет бесконечное число нулей на $[1, +\infty)$, а значит, по теореме Штурма решения исходного уравнения тоже имеют бесконечное число нулей.

Т 4. Докажем, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - 2xy' + y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более трех нулей. Заменим $y(x) = u(x)z(x)$:

$$u''z + 2u'z' + uz'' - 2x(u'z + uz') + uz = 0.$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы $2u' - 2ux = 0$. Например, $u = e^{\frac{x^2}{2}}$. Тогда исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$e^{\frac{x^2}{2}}z'' + \left(e^{\frac{x^2}{2}} + x^2e^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} - 2x^2e^{\frac{x^2}{2}}\right)z = 0$$

$$z'' + (2 - x^2)z = 0.$$

При $2 - x^2 \le 0$ это уравнение не может иметь более одного нуля по теореме Штурма, а для $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ имеем $|2 - x^2| \le 2$, которое означает, что по теореме о расстоянии d нулей $d \ge \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, откуда на $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ есть не более двух нулей.

Т 5. (а) Докажем, что любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \mathrm{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$. Заменим $y(x) = u(x)z(x)$:

$$(x^2 - \nu^2)uz + x(u'z + uz') + x^2(u''z + u'z' + uz'') = 0.$$

Выберем u так, чтобы $ux + 2x^2u' = 0$, например $u = x^{-\frac{1}{2}}$. Тогда исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right)z = 0.$$

В случае $|\nu| \le \frac{1}{2}$ коэффициент при z больше либо равно чем 1. Значит, поскольку любое решение уравнения $z'' + z = 0$ имеет бесконечное число нулей, то по теореме Штурма любое решение исходного уравнения также имеет бесконечное число нулей.

В случае же $|\nu| > \frac{1}{2}$ имеем $1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \ge \frac{1}{2}$ для всех $x \in \left[\sqrt{2\nu^2 - \frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Значит, поскольку любое решение уравнения $z'' + \frac{1}{2}z = 0$ имеет бесконечное число нулей, то по теореме Штурма любое решение исходного уравнения также имеет бесконечное число нулей.

(б) Имеем, что расстояние d между двумя нулями принадлежит любому отрезку $\left[\pi/\sqrt{M}, \pi/\sqrt{m}\right]$, где

$$m \le 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \le M.$$

При $x \to \infty$ получаем, что $\frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \to 0$, а значит m, M можно взять сколь угодно ближе к 1, откуда получаем, что $d \to \pi$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий.

Ф 964. Исследуем на особые точки $y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$:

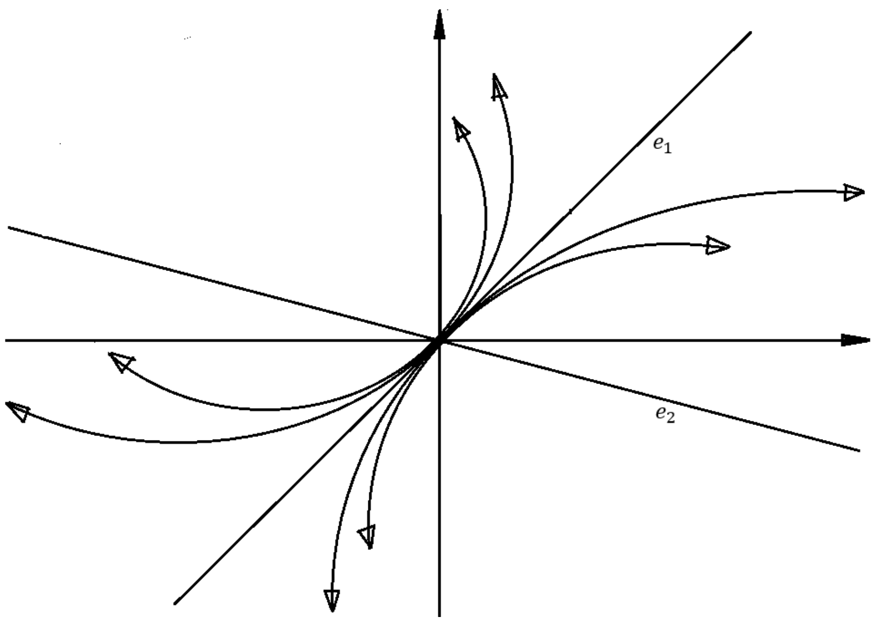
$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Получается неустойчивый узел.



Ф 972. Исследуем на особые точки

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}.$$

Единственная особая точка, очевидно, $(0, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1;$$

$$(A - \lambda_{1,2} E)e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получается вырожденный узел.

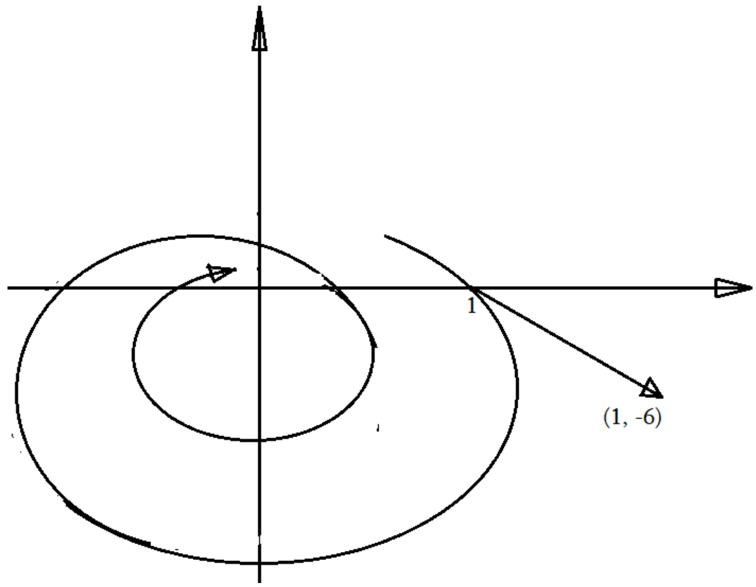
Ф 973. Исследуем на особые точки

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}.$$

Единственная особая точка, очевидно, $(0, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Поскольку вещественная часть $\lambda_{1,2} < 0$, то получается устойчивый фокус. В точке $(1, 0)$ касательный вектор имеет координаты $(1, -6)$, следовательно траектория вращается по часовой стрелке.



Ф 974. Исследуем на особые точки

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}.$$

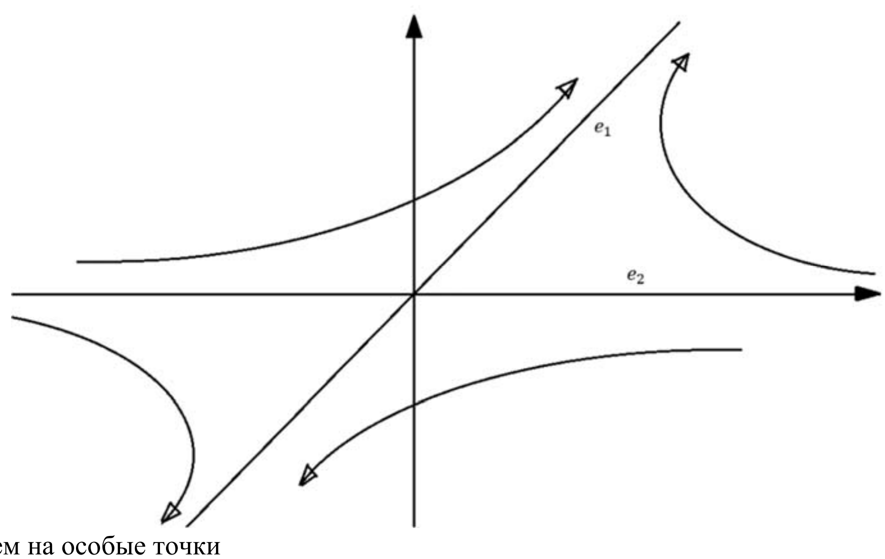
Единственная особая точка, очевидно, $(0, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Получается седло.



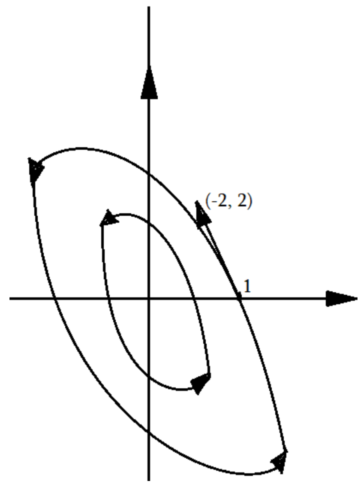
Ф 975. Исследуем на особые точки

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}.$$

Единственная особая точка, очевидно, $(0, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}i.$$

Получается центр. В точке $(1, 0)$ касательная имеет координаты $(-2, 2)$, а значит вращение происходит против часовой стрелки.



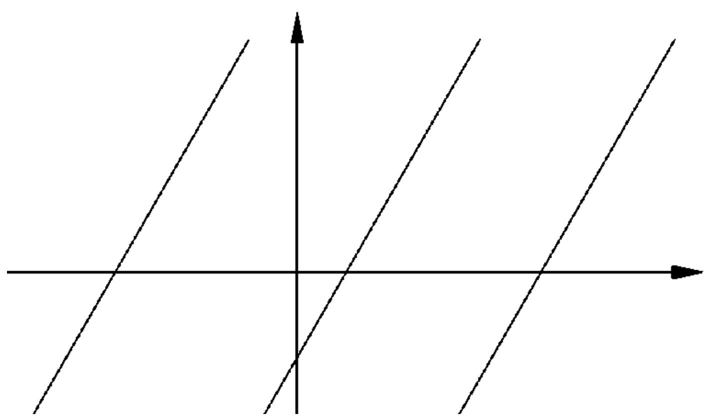
Ф 978. Исследуем на особые точки

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}.$$

Единственная особая точка, очевидно, $(0, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Значит исходная система сокращается в уравнение $\frac{dy}{dx} = 2$, решениями которого являются параллельные прямые.



Р 13.9. Исследуем на положения равновесия систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + x + 2y^2 - 2 \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y^2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) = 0 \\ y^2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = -1, y = \pm 1.$$

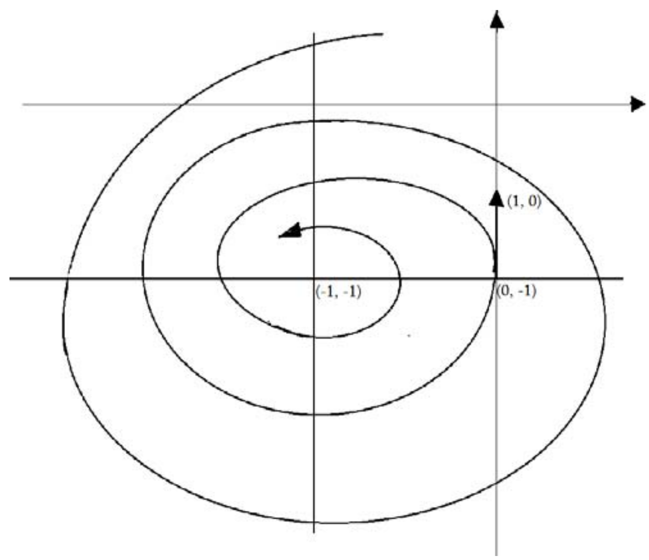
Т.е. получаются 2 особые точки $T_1(-1,-1)$ и $T_2(-1,1)$.

$$A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 & 4y \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Рассмотрим точку T_1. Для нее

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i.$$

Получается устойчивый фокус. В точке $(0,-1)$ касательный вектор имеет координаты $(0,1)$. Значит траектория вращается против часовой стрелки.



Рассмотрим точку T_2. Для нее

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

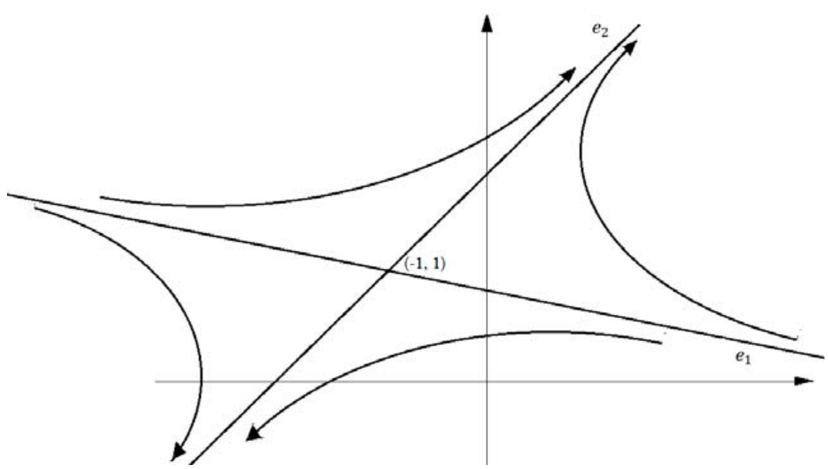
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}.$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получается седло.



Р 13.15. Исследуем на точки равновесия систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ \ln(3x^2 - 1) - \ln 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1, y = 1.$$

Получаются две особые точки $T_1(-1,1)$ и $T_2(1,1)$.

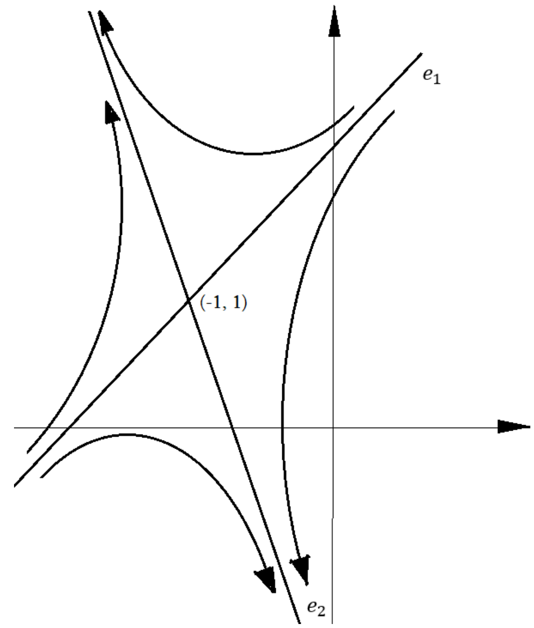
$$A = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ \dfrac{6x}{3x^2-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Для T_1 получаем

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases};$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



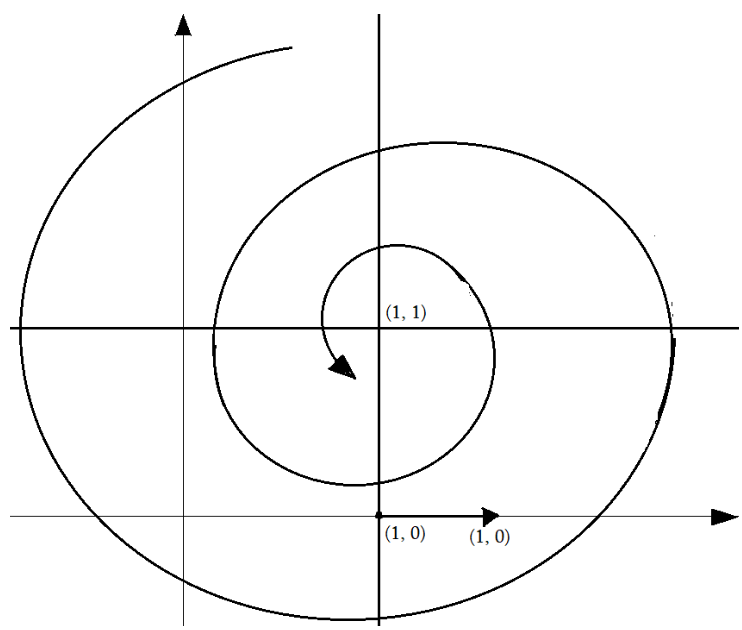
Получается седло.

Для T_2 получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i;$$

Получается неустойчивый фокус. В точке $(1, 0)$ касательный вектор имеет координаты $(1, 0)$, значит траектория вращается против часовой стрелки.



Р 13.39. Исследуем на точки равновесия систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 8 + 4y - 2xy \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 8 + 4y - 2xy = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2y - xy = 0 \\ x = \pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ 4 + 2y - 2y^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y \\ 4 + 2y + 2y^2 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ y = -1; 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y \\ y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{cases} \end{array} \right. .$$

Поскольку мы рассматриваем вещественную плоскость, то получаем две точки равновесия $T_1(-2,-1)$ и $T_2(4,2)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2y & 4 - 2x \\ 2x & -8y \end{pmatrix}$$

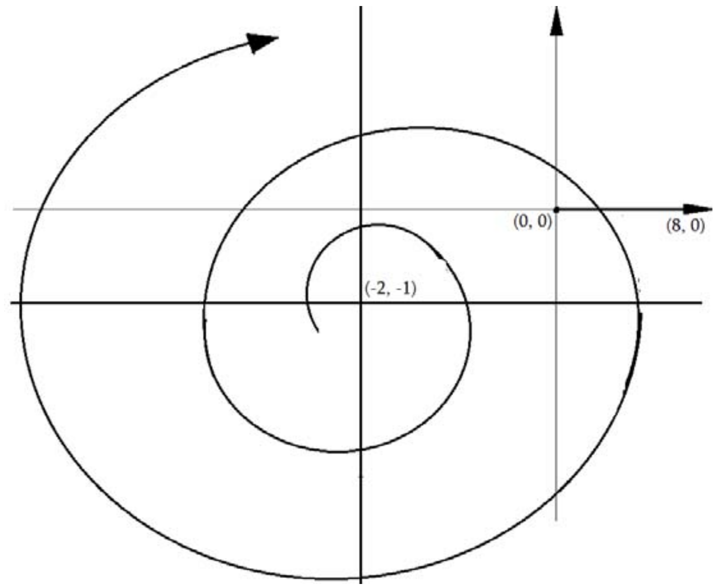
Для T_1 получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -4 & 8 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{23} i.$$

Фазовой траекторией будет неустойчивый фокус. В точке $(0,0)$ касательный вектор имеет координаты $(8,0)$, т.е. вращение происходит по часовой стрелке.

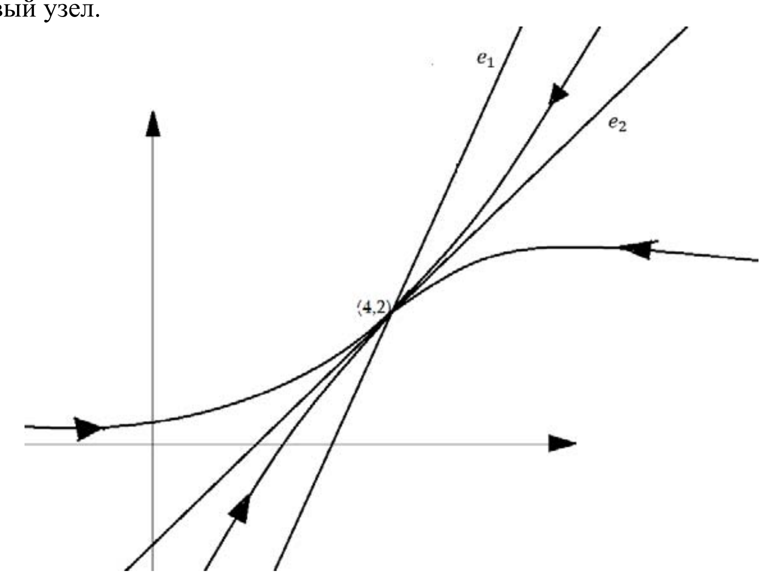


Для T_2 получаем

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & -16 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -4 \\ 8 & -16 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 20\lambda + 96 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -12, \lambda_2 = -8.$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad (A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получается устойчивый узел.

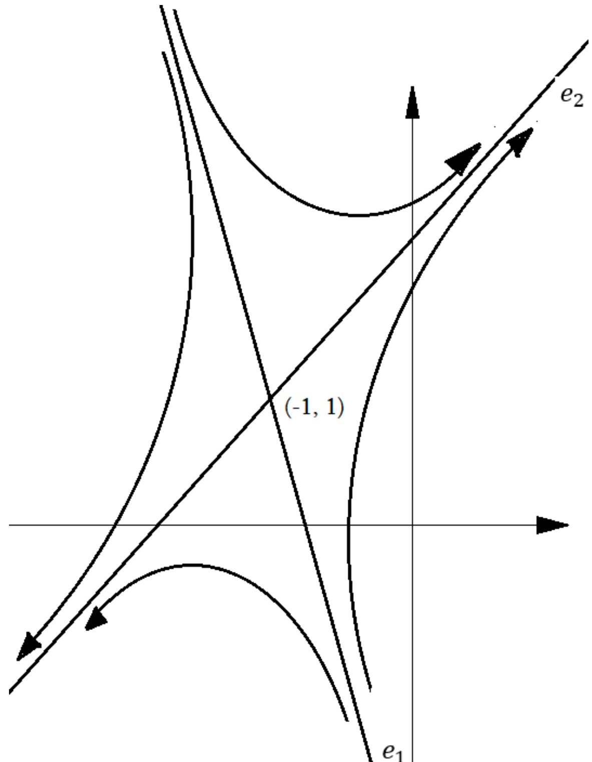


Р 13.44. Исследуем на точки равновесия систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - e^{x^2 - y} \\ \dot{y} = \operatorname{th}(2 + x - x^2) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 1 - e^{x^2 - y} = 0 \\ \operatorname{th}(2 + x - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ (x+1)(x-2) = 0 \end{cases}.$$

Получаются две точки равновесия $T_1(-1, 1)$, $T_2(2, 4)$.



$$A = \begin{pmatrix} -2xe^{x^2-y} & e^{x^2-y} \\ \dfrac{-2x+1}{\operatorname{ch}^2(2+x-x^2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Для T_1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3;$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получается седло.

Для T_2

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

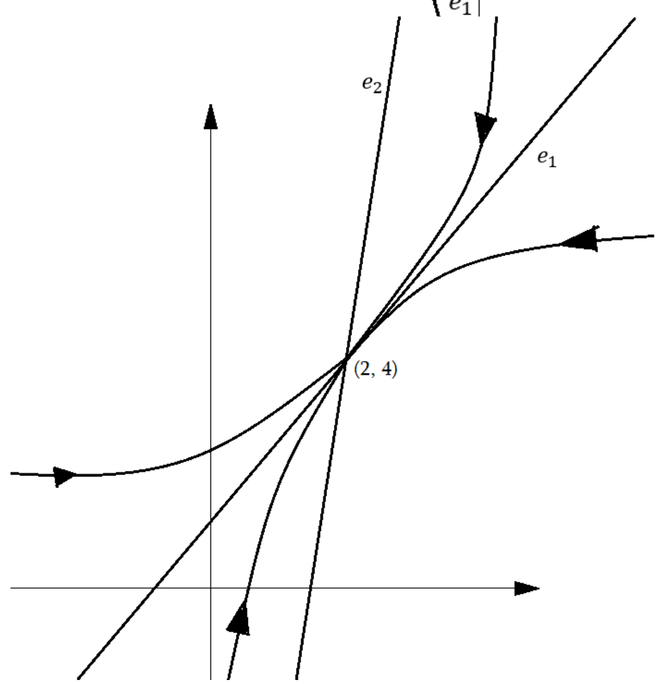
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1;$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Получается устойчивый узел.



Р 13.45. Исследуем на точки равновесия систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1+2x-5y} - 1 \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}x^2 - 2y\right) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+2x-5y} - 1 = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}x^2 - 2y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{5} = y \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}x^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{5}x = y \\ \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{5}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{5}x = y \\ x(2x-1) = 0 \end{cases}.$$

Отсюда у системы есть две точки равновесия: $T_1(0,0)$ и $T_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$. В точках равновесия имеем

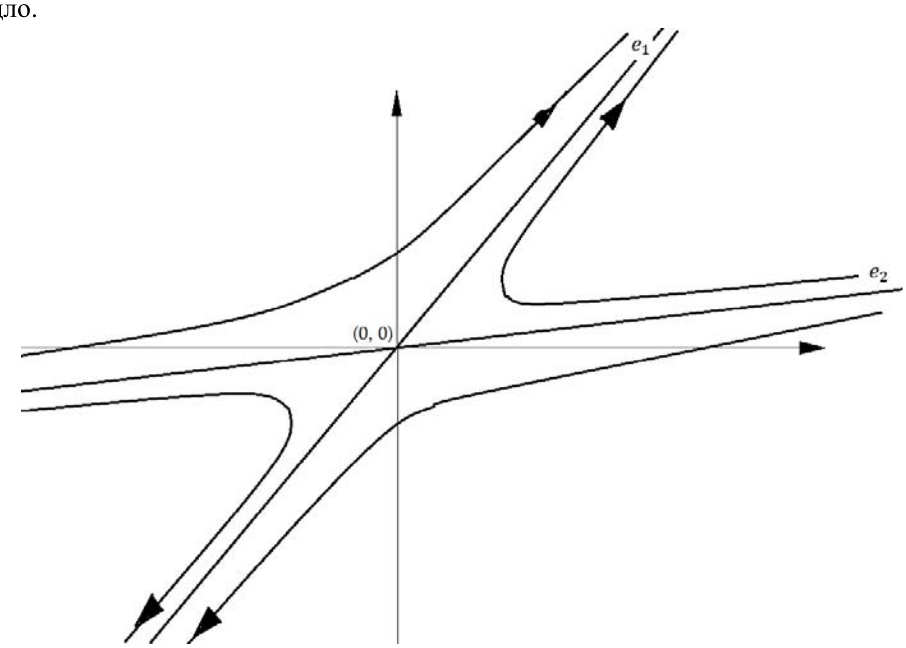
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{6}{5}x + \dfrac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Для T_1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2};$$

$$(A - \lambda_1 E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (A - \lambda_2 E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

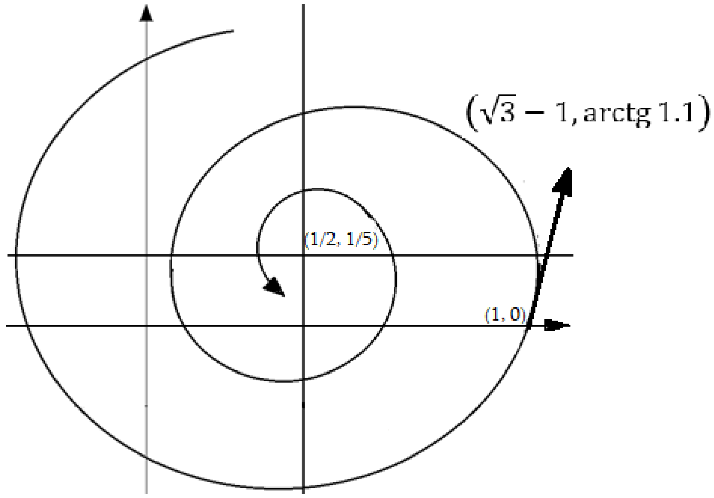
Получается седло.



Для T_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{11}{10} & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{11}{10} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

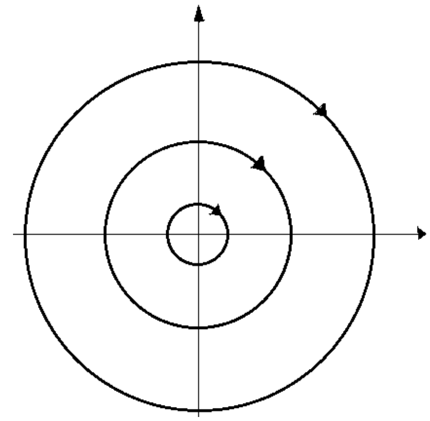
Получается устойчивый фокус. В точке $(1, 0)$ касательный вектор имеет координаты $\left(\sqrt{3} - 1, \operatorname{arctg} 1.1\right)$. Значит вращение происходит против часовой стрелки.



I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем.

С 14.12. Исследуем при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2) \end{cases}.$$



Случай 1 ($a = 0$). Система примет вид $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\ddot{x} = \dot{y} = -x \qquad \begin{cases} x = A\sin(t + \omega) \\ y = A\cos(t + \omega) \end{cases}.$$

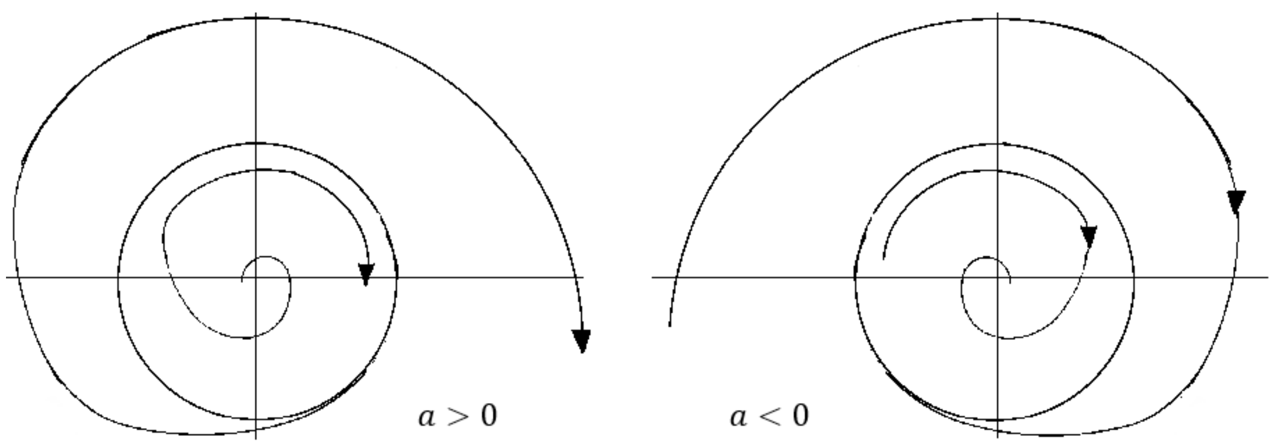
Фазовыми траекториями последней системы будут окружности с центром в начале координат, вращающиеся по часовой стрелке.

Случай 1 ($a \neq 0$). Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,

$$\dot{r} = \frac{2x\dot{x} + 2y\dot{y}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ar^2(r^2 - 2)}{r} = ar(r^2 - 2);$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-r^2}{r^2} = -1.$$

Система принимает вид $\begin{cases} \dot{r} = ar(r^2 - 2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$, в положениях равновесия которой имеем $r = 0$ или $r = \sqrt{2}$. При $r = 0$ имеем фазовую траекторию — начало координат. При $r = \sqrt{2}$ имеем неустойчивый предельный цикл — окружность с центром в начале координат, радиусом $\sqrt{2}$. Пусть $a > 0$. Тогда $r > \sqrt{2} \Longrightarrow \dot{r} > 0$ и $r < \sqrt{2} \Longrightarrow \dot{r} < 0$, откуда получаем фазовые траектории в картинке. При $a < 0$ все аналогично, кроме того, что предельный цикл устойчив.



Т 1. Найдем первые интегралы уравнений и исследуем поведение фазовых траекторий:

а) $\ddot{x} + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \Longrightarrow \frac{dx}{y} = dt = -\frac{dy}{\sin x} \Longrightarrow \frac{y^2}{2} - \cos x = U_1(x, y) = C_1$. Особые точки — $(x, y) = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{dx}{y} = dt = \frac{dy}{x - x^2} \Longrightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = U_1(x, y) = C_1$. Особые точки — $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

С 16.5. Найдя первый интеграл, решим систему в области $x > 0$, $y > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{x}{y} \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

$$\frac{y}{x}\dot{x} = -\frac{x}{y}\dot{y} \qquad -\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C_1$$

$$\dot{x} = -\frac{x}{\dfrac{x}{C_1 x - 1}} = 1 - C_1 x \qquad x = C(t)e^{-C_1 t} \qquad \dot{C}e^{-C_1 t} = 1 \qquad C(t) = \frac{e^{C_1 t}}{C_1} + C_2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{C_1} + C_2 e^{-C_1 t}, \qquad y = \frac{x}{C_1 x - 1} = \frac{\dfrac{1}{C_1} + C_2 e^{-C_1 t}}{C_1 C_2 e^{-C_1 t}} = \frac{e^{C_1 t}}{C_1^2 C_2} + \frac{1}{C_1}}.$$

С 16.26. Найдя два независимых первых интеграла, решим систему в области $x > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z. \\ \dot{z} = xz - 2x^4 \end{cases}$$

Заметим, что $\dot{(z + xy)} = \dot{z} + x\dot{y} + y\dot{x} = xz - 2x^4 + 2x^4 - x^2 y - xz + yx^2 = 0$, а значит, $z + xy = U_1(x, y, z)$ есть первый интеграл. Отсюда $\dot{y} = 2x^3 - U_1$ и

$$\frac{dy}{2x^3 - U_1} = dt = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow dy = \left(2x - \frac{U_1}{x^2}\right)dx \Rightarrow y = x^2 + \frac{U_1}{x} + C = x^2 + \frac{z}{x} + y + C \Rightarrow x^2 + \frac{z}{x} = U_2(x, y, z).$$

Понятно, U_1 и U_2 независимы:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} U'_{1x} & U'_{1y} & U'_{1z} \\ U'_{2x} & U'_{2y} & U'_{2z} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 2x - \dfrac{z}{x^2} & 0 & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} = 2.$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{t + C_3} \\ -(t + C_3)C_1 - C_2 + \dfrac{1}{(t + C_3)^2} \\ -\dfrac{C_2}{t + C_3} + \dfrac{1}{(t + C_3)^3} \end{pmatrix},$$

где $C_1 = U_1$, $C_2 = U_2$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

С 17.5. Найдем общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z^2(x-3y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u=\frac{x^2}{y}$ при $3yz=1$.

$$\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=y\\ \dot{z}=z^2(x-3y)\end{cases}$$

$$\frac{dx}{x}=dt=\frac{dy}{y}\Longrightarrow\boxed{\frac{y}{x}=u_1(x,y,z)}$$

$$\frac{dz}{z^2(x-3y)}=dt=\frac{dx}{x}\Longrightarrow\frac{dz}{z^2}=(1-3u_1)dx\Longrightarrow-\frac{1}{z}=(1-3u_1)x+C_2\Longrightarrow\boxed{\frac{1}{z}+x-3y=u_2(x,y,z)}$$

Общее решение — $u(x,y,z)=F(u_1,u_2)=F\left(\frac{y}{x},\frac{1}{z}+x-3y\right)$.

$$\begin{cases}u=\dfrac{x^2}{y}\\ 3yz=1\\ u_1=\dfrac{y}{x}\\ u_2=\dfrac{1}{z}+x-3y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{z}=3y\\ u_2=x\\ y=u_1x=u_1u_2\end{cases}\Longrightarrow\boxed{u=\frac{u_2^2}{u_1u_2}=\frac{u_2}{u_1}=\frac{x(1+xz-3yz)}{yz}}.$$

С 17.16. Найдем общее решение уравнения

$$(z-x+3y)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x-3y)\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u=\frac{4y}{z}$ при $x=3y$.

$$\begin{cases}\dot{x}=z-x+3y\\ \dot{y}=z+x-3y\\ \dot{z}=-2z\end{cases}$$

$$\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=z-x+3y+z+x-3y-2z=0\Longrightarrow\boxed{x+y+z=u_1(x,y,z)}$$

$$\dot{y}=u_1-4y\Longrightarrow\frac{dy}{u_1-4y}=\frac{dz}{-2z}\Longrightarrow\frac{u_1-4y}{z^2}=u_2\Longrightarrow\boxed{\frac{x-3y+z}{z^2}=u_2(x,y,z)}$$

Общее решение — $u(x,y,z)=F(u_1,u_2)=F\left(x+y+z,\frac{x-3y+z}{z^2}\right)$.

$$\begin{cases}u=\dfrac{4y}{z}\\ x=3y\\ u_1=x+y+z\\ u_2=\dfrac{x-3y+z}{z^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_1=4y+z\\ u_2=\dfrac{1}{z}\\ z=\dfrac{1}{u_2}\\ 4y=u_1-\dfrac{1}{u_2}\end{cases}\Longrightarrow\boxed{u=\frac{4y}{z}=u_1u_2-1=\frac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2}-1}.$$

С 17.22. Найдем общее решение уравнения

$$(2x^2z^2+x)\frac{\partial u}{\partial x}-(4xyz^2-y)\frac{\partial u}{\partial y}-(4xz^3-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u = yz^2$ при $x = z$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2z^2 + x \\ \dot{y} = 4xyz^2 - y \\ \dot{z} = 4xz^3 - z \end{cases}$$

$$z\dot{y} - y\dot{z} = zy - 4xyz^3 - yz + 4xyz^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{z}{y} = u_1(x, y, z)}$$

$$\frac{dx}{(2xz^2 + 1)x} = \frac{dz}{z(1 - 4xz^2)} = \frac{2zdx + xdz}{2zx(2xz^2 + 1) + xz(1 - 4xz^2)} = \frac{2zdx + xdz}{3xz}$$

$$(2xz^2 + 1)(2zdx + xdz) = 3zdx$$

$$(4xz^3 - z)dx + (2x^2z^2 + x)dz = 0$$

$$\mu = \mu(z), \quad [\mu(4xz^3 - z)]'_z = \mu'_z(4xz^3 - z) + \mu(12xz^2 - 1)$$

$$\mu(2x^2z^2 + x)'_x = \mu(4xz^2 + 1)$$

$$\mu'_z(4xz^3 - z) + \mu(8xz^2 - 2) = 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dz}{z} \Rightarrow \mu = \frac{C}{z^2}$$

$$\left(4xz - \frac{1}{z}\right)dx + \left(2x^2 + \frac{x}{z^2}\right)dz = 0$$

$$2x^2 + \frac{x}{z^2} = \left[\int \left(4xz - \frac{1}{z}\right)dx\right]'_z = \left[2x^2\,z - \frac{x}{z} + \varphi(z)\right]'_z = 2x^2 + \frac{x}{z^2} + \varphi'_z \Rightarrow \varphi(z) = C$$

$$\boxed{2x^2z - \frac{x}{z} = u_2(x, y, z)}$$

Общее решение — $u(x, y, z) = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{z}{y}, 2x^2z - \frac{x}{z}\right)$.

$$\begin{cases} u = yz^2 \\ x = z \\ u_1 = \dfrac{z}{y} \\ u_2 = 2x^2z - \dfrac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 2z^3 - 1 \\ z = \sqrt[3]{\dfrac{u_2 + 1}{2}} \\ y = \dfrac{z}{u_1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = yz^2 = \frac{z}{u_1}\cdot z^2 = \frac{u_2 + 1}{2u_1} = \frac{y(2x^2z^2 - x + z)}{2z^2}}.$$

С 17.79. Найдем общее решение уравнения

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz \\ \dot{z} = -\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$-\frac{y}{x}dx = 2xydy \Rightarrow -\frac{dx}{x^2} = 2dz \Rightarrow \frac{1}{x} = 2z + C \Rightarrow \boxed{2z - \frac{1}{x} = u_1}$$

$$\dot{y} = -u_1x - y^2 \Rightarrow \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{-u_1x - y^2}$$

$$(u_1x+y^2)dx+2xydy=0$$

$$2xy=\left[\int(u_1x+y^2)dx\right]_y'=\left[\frac{u_1x^2}{2}+y^2x+\varphi(y)\right]_y'=2yx+\varphi_y'\Rightarrow\varphi(y)=C$$

$$\boxed{u_2=\frac{u_1x^2}{2}+y^2x=zx^2+xy^2-\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{x^2} & 0 & 2\\ -\frac{1}{2}+2xz+y^2 & 2xy & x^2\end{pmatrix}=2$$

$$\boxed{u(x,y,z)=F(u_1,u_2)=F\left(2z-\frac{1}{x},zx^2+xy^2-\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\begin{cases}u=\frac{1}{2}-y^2\\ y^2+xz=1\\ u_1=2z-\frac{1}{x}\\ u_2=zx^2+xy^2-\frac{x}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_2=\frac{x}{2}\\ x=2u_2\\ z=\dfrac{u_1+\frac{1}{2u_2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{u=-\frac{1}{2}+u_2\left(u_1+\frac{1}{2u_2}\right)=(2xz-1)\left(xz+y^2-\frac{1}{2}\right)}.$$

С 17.83. Найдем общее решение уравнения

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x}+(2x-y^2)\frac{\partial u}{\partial y}-y^3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u=x^2z^2$ при $y^2=2x$.

$$\begin{cases}\dot{x}=2xy\\ \dot{y}=2x-y^2\\ \dot{z}=y^3z\end{cases}$$

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{2x-y^2}\Rightarrow(2x-y^2)dx-2xydy=0$$

$$-2xy=\left[\int(2x-y^2)dx\right]_y'=[x^2-xy^2+\varphi(y)]_y'=-2xy+\varphi_y'\Rightarrow\boxed{u_1=x^2-xy^2}$$

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dz}{y^3z}\Rightarrow\frac{dx}{2x}=\frac{xdz}{z(x^2-u_1)}\Rightarrow\left(1-\frac{u_1}{x^2}\right)dx=\frac{2dz}{z}\Rightarrow\boxed{u_2=x+\frac{u_1}{x}-\ln z^2=2x-y^2-\ln z^2}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2x-y^2 & -2xy & 0\\ 2 & -2y & -\frac{2}{z}\end{pmatrix}=2$$

$$\boxed{u(x,y,z)=F(u_1,u_2)=F(x^2-xy^2,2x-y^2-\ln z^2)}$$

$$\begin{cases}u=x^2z^2\\ y^2=2x\\ u_1=x^2-xy^2\\ u_2=2x-y^2-\ln z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_2=-\ln z^2\\ z^2=e^{-u_2}\\ u_1=-x^2\end{cases}\Rightarrow\boxed{u=x^2z^2=-u_1e^{-u_2}=xz^2(y^2-x)e^{y^2-2x}}.$$

Т 2. В области $x>0$, $y>0$, $z>0$ найдем все решения уравнения

$$(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{x^3-xy^2}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решим задачу Коши с начальным условием $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2xy \\ \dot{z} = \dfrac{x^3 - xy^2}{z} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} \Longrightarrow 2xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$$

$$\mu = \mu(y), \quad (\mu \cdot 2xy)'_y = \mu'_y \cdot 2xy + \mu \cdot 2x$$

$$\left(-\mu(x^2 + y^2)\right)'_x = -\mu \cdot 2x$$

$$2xy\mu'_y = -4x\mu \Longrightarrow y\mu'_y = -2\mu \Longrightarrow \mu = \frac{C}{y^2}$$

$$2\frac{x}{y}dx - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dy = 0$$

$$2\frac{x}{y} = \left[-\int \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)dy\right]'_x = \left[\frac{x^2}{y} - y + \varphi(x)\right]'_x = \frac{2x}{y} + \varphi'_x \Longrightarrow \boxed{u_1 = \frac{x^2}{y} - y}$$

$$\dot{z} = \frac{xy}{z}u_1 \Longrightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{2z}{u_1} \Longrightarrow \boxed{u_2 = z^2 - u_1 y = z^2 - x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} & 0 \\ -2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{u(x, y, z) = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{x^2}{y} - y, -x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

$$\begin{cases} u = z^2 \\ y^2 - x^2 = 1 \\ u_1 = \dfrac{x^2 - y^2}{y} \\ u_2 = -x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{y} \\ x^2 = y^2 - 1 = \dfrac{1}{u_1^2} - 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u = z^2 = u_2 - 1 = -x^2 + y^2 + z^2 - 1}.$$

III. Вариационное исчисление.

Р 19.21. Решим простейшую вариационную задачу

$$J(y)=\int_1^e\left[\frac{1}{2}xy'^2+\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right]dx\,,\quad y(1)=1,\quad y(e)=2.$$

Имеем

$$F(x,y,y')=\frac{1}{2}xy'^2+\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2},\qquad F_{y'}=xy'+\frac{2y}{x},\qquad F_y=\frac{2y'}{x}-\frac{2y}{x^2}.$$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(xy'+\frac{2y}{x}\right)-\frac{2y'}{x}+\frac{2y}{x^2}=0$$

$$xy''+y'+\frac{2y'x-2y}{x^2}-\frac{2y'}{x}+\frac{2y}{x^2}=0$$

$$xy''+y'=0$$

$$(xy')'=0$$

$$xy'=C_1$$

$$y=C_1\ln x+C_2.$$

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases}C_2=1\\ C_1+C_2=2\end{cases}\to y=\ln x+1.$$

Проверим, что y является допустимой экстремалью:

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^e\left[\frac{1}{2}x(y+h)'^2+\frac{2(y+h)(y+h)'}{x}-\frac{(y+h)^2}{x^2}\right]dx-\int_1^e\left[\frac{1}{2}xy'^2+\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right]dx=$$

$$=\int_1^e\left[\frac{1}{2}x\left(h'^2+2h'y'\right)+\frac{2(yh'+y'h+hh')}{x}-\frac{h^2+2hy}{x^2}\right]dx=$$

$$=\int_1^e\left[\left(\frac{2y'}{x}-\frac{2y}{x^2}\right)h+\left(xy'+\frac{2y}{x}\right)h'\right]dx+\int_1^e\left[\frac{1}{2}xh'^2+\frac{2hh'}{x}-\frac{h^2}{x^2}\right]dx=$$

$$=\int_1^e\left[\frac{1}{2}xh'^2+\frac{2hh'}{x}-\frac{h^2}{x^2}\right]dx=\int_1^e\frac{1}{2}xh'^2dx\geq 0,$$

откуда $y=\ln x+1$ является минимумом. В последнем равенстве мы воспользовались тождеством

$$\int_1^e\left[\frac{2hh'}{x}-\frac{h^2}{x^2}\right]dx=0\Leftarrow\int_1^e\frac{hh'}{x}dx=\int_1^e\frac{h}{x}dh=\frac{h^2}{x^2}\bigg|_1^e-\int_1^e hd\left(\frac{h}{x}\right)=-\int_1^e h\cdot\frac{h'x-h}{x^2}dx=\int_1^e\left[-\frac{hh'}{x}+\frac{h^2}{x^2}\right]dx.$$

Р 19.45. Решим простейшую вариационную задачу

$$J(y)=\int_0^1\left[(1+x^2)(y')^2-4xy'+yy'\sin^2 x+\frac{1}{2}y^2\sin 2x\right]dx\,,\quad y(0)=0,\quad y(1)=\ln 2.$$

Имеем

$$F(x,y,y') = (1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2 \sin 2x,$$

$$F_y = y'\sin^2 x + y\sin 2x, \qquad F_{y'} = 2y'(1+x^2) - 4x + y\sin^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(2y'(1+x^2) - 4x + y\sin^2 x) - (y'\sin^2 x + y\sin 2x) = 0$$

$$2y''(1+x^2) + 2y'\cdot 2x - 4 + y'\sin^2 x + y\cdot 2\sin x\cos x - y'\sin^2 x - y\sin 2x = 0$$

$$y''(1+x^2) + 2y'x - 2 = 0$$

$$y' = z$$

$$z' + \frac{2x}{1+x^2}z = \frac{2}{1+x^2}$$

$$z' = -\frac{2x}{1+x^2}z \Longrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \Longrightarrow z = \frac{C_0(x)}{1+x^2}$$

$$\frac{C_0'}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \Longrightarrow C_0 = 2x + C_1 \Longrightarrow y' = z = \frac{2x+C_1}{1+x^2}$$

$$dy = \frac{2x+C_1}{1+x^2}dx \Longrightarrow y = \ln(1+x^2) + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$$

$$C_1 = C_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\hat{y} = \ln(1+x^2)}$$

$$J(y+h) - J(y) = \int_0^1 \left[(1+x^2)(y'+h')^2 - 4x(y'+h') + (y+h)(y'+h')\sin^2 x + \frac{1}{2}(y+h)^2 \sin 2x\right] dx$$

$$-\int_0^1 \left[(1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2\sin 2x\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(1+x^2)\left(2y'h' + h'^2\right) - 4xh' + (yh' + hy' + hh')\sin^2 x + \frac{1}{2}(2yh + h^2)\sin 2x\right] dx =$$

$$= \int_0^1 [(y'\sin^2 x + y\sin 2x)h + (2y'(1+x^2) - 4x + y\sin^2 x)h']dx$$

$$+ \int_0^1 \left[(1+x^2)h'^2 + hh'\sin^2 x + \frac{h^2}{2}\sin 2x\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(1+x^2)h'^2 + hh'\sin^2 x + \frac{h^2}{2}\sin 2x\right] dx = \int_0^1 \left[(1+x^2)h'^2 + h^2 \sin 2x\right] dx \geq 0,$$

откуда $y = \ln(1+x^2)$ является минимумом. В последнем равенстве мы воспользовались тождеством

$$\int_0^1 \left[hh'\sin^2 x - \frac{h^2}{2}\sin 2x\right] dx = 0 \Longleftarrow \int_0^1 hh'\sin^2 x\,dx = h^2\sin^2 x\big|_0^1 - \int_0^1 h(h'\sin^2 x + h\sin 2x)dx.$$

Р 19.72. Решим простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_1^4 \left[15\sqrt{x}y + 3x^2 yy' - x^3(y')^2\right]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(4) = -3.$$

Имеем

$$F = 15\sqrt{x}y + 3x^2yy' - x^3(y')^2, \qquad F_y = 15\sqrt{x} + 3x^2y', \qquad F_{y'} = 3x^2y - 2x^3y'$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2y - 2x^3y') - \left(15\sqrt{x} + 3x^2y'\right) = 0$$

$$6xy + 3x^2y' - 6x^2y' - 2x^3y'' - 15\sqrt{x} - 3x^2y' = 0$$

$$-2x^3y'' - 6x^2y' + 6xy - 15\sqrt{x} = 0$$

$$-2x^3y'' - 6x^2y' + 6xy = 0$$

$$y_1 = -x$$

$$\begin{vmatrix} -x & y \\ -1 & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\frac{3}{x}dx} \Longrightarrow -xy' + y = \frac{C_1}{x^3}$$

$$y = C(x)x \Longrightarrow -x^2C' = \frac{C_1}{x^3} \Longrightarrow C = \frac{C_1}{4x^4} + C_2 \Longrightarrow y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1'}{x^3} + C_2'x = 0 \\ -\dfrac{3C_1'}{x^4} + C_2' = -\dfrac{15}{2}x^{-\frac{5}{2}} \end{cases} \Longrightarrow C_1' = -C_2'x^4 \Longrightarrow 4C_2' = -\frac{15}{2}x^{-\frac{5}{2}} \Longrightarrow C_2 = \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \widetilde{C_2}$$

$$C_1' = \frac{15}{8}x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow C_1 = \frac{3}{4}x^{\frac{5}{2}} + \widetilde{C_1}$$

$$y = \frac{\widetilde{C_1}}{x^3} + \widetilde{C_2}x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} \widetilde{C_1} + \widetilde{C_2} = -1 \\ \dfrac{\widetilde{C_1}}{64} + 4\widetilde{C_2} = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = -1 \\ \widetilde{C_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \hat{y} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$J(y+h) - J(y) = \int_1^4 \left[15\sqrt{x}(y+h) + 3x^2(y+h)(y'+h') - x^3(y'+h')^2\right]dx$$

$$-\int_1^4 \left[15\sqrt{x}y + 3x^2yy' - x^3(y')^2\right]dx =$$

$$= \int_1^4 \left[15\sqrt{x}h + 3x^2(yh' + y'h + hh') - x^3\left(2y'h' + {h'}^2\right)\right]dx =$$

$$= \int_1^4 \left[\left(15\sqrt{x} + 3x^2y'\right)h + (3x^2y - 2x^3y')h'\right]dx$$

$$+\int_1^4 \left[3x^2hh' - x^3{h'}^2\right]dx = \int_1^4 \left[3x^2hh' - x^3{h'}^2\right]dx$$

Заметим, что

$$\int_1^4 [3x^2hh']dx = 3x^2h^2\Big|_1^4 - \int_1^4 3h(h'x^2 + 2xh)dx = -\int_1^4 3hh'x^2dx - \int_1^4 6xhdx \Longrightarrow \int_1^4 3x^2hh'dx = -\int_1^4 3xhdx$$

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^4\left[3x^2hh'-x^3h'^2\right]dx=\int_1^4\left[-3xh-x^3h'^2\right]dx\le 0.$$

Значит, $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$ является максимумом.

Р 19.105. Покажем, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

$$J(y)=\int_0^\pi\left[(y')^2-\frac{25}{16}y^2+50xy\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=16\pi.$$

Имеем

$$F=(y')^2-\frac{25}{16}y^2+50xy,\qquad F_y=-\frac{25}{8}y+50x,\qquad F_{y'}=2y'$$

$$\frac{d}{dx}(2y')+\frac{25}{8}y-50x=0$$

$$y''+\frac{25}{16}y-25x=0$$

$$y=C_1\sin\frac{5}{4}x+C_2\cos\frac{5}{4}x+16x$$

$$C_1=C_2=0\Longrightarrow y=16x$$

$$J(y+h)-J(y)=\int_0^\pi\left[(y'+h')^2-\frac{25}{16}(y+h)^2+50x(y+h)\right]dx-\int_0^\pi\left[(y')^2-\frac{25}{16}y^2+50xy\right]dx=$$

$$=\int_0^\pi\left[\left(2y'h'+h'^2\right)-\frac{25}{16}(2yh+h^2)+50xh\right]dx=$$

$$=\int_0^\pi\left[\left(-\frac{25}{8}y+50x\right)h+2y'h'\right]dx+\int_0^\pi\left[h'^2-\frac{25}{16}h^2\right]dx=\int_0^\pi\left[h'^2-\frac{25}{16}h^2\right]dx$$

При $h=\sin x$ имеем

$$\int_0^\pi\left[h'^2-\frac{25}{16}h^2\right]dx=\int_0^\pi\left[\cos^2x-\frac{25}{16}\sin^2x\right]dx=\int_0^\pi\left[1-\frac{41}{16}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^\pi\left[-\frac{9}{32}+\frac{\cos 2x}{32}\right]dx=-\frac{9\pi}{32}<0,$$

а при $h=\sin 2x$

$$\int_0^\pi\left[h'^2-\frac{25}{16}h^2\right]dx=\int_0^\pi\left[4\cos^2 2x-\frac{25}{16}\sin^2 2x\right]dx=\int_0^\pi\left[4-\frac{89}{16}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^\pi\left[\frac{39}{32}+\frac{89}{32}\cos 4x\right]dx=\frac{39}{32}\pi>0.$$

Т 3. Исследуем на экстремум функционал, определив знаки приращения:

$$J(y)=\int_1^2\left(\frac{2yy'}{x}-7\frac{y^2}{x^2}-(y')^2-12\frac{y}{x}\right)dx,\qquad y(1)=3,\qquad y(2)=1.$$

Имеем

$$F=\frac{2yy'}{x}-7\frac{y^2}{x^2}-(y')^2-12\frac{y}{x},\qquad F_y=\frac{2y'}{x}-\frac{14y}{x^2}-\frac{12}{x},\qquad F_{y'}=\frac{2y}{x}-2y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2y}{x}-2y'\right)-\left(\frac{2y'}{x}-\frac{14y}{x^2}-\frac{12}{x}\right)=0$$

$$\frac{2y'x-2y}{x^2}-2y''-\frac{2y'}{x}+\frac{14y}{x^2}+\frac{12}{x}=0$$

$$-y''+\frac{6y}{x^2}+\frac{6}{x}=0$$

$$y_1=x^3$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & y \\ 3x^2 & y' \end{vmatrix}=C_1\Rightarrow x^3y'-3x^2y=C_1\Rightarrow y=C(x)x^3$$

$$C'x^6=C_1\Rightarrow C=-\frac{C_1}{5x^5}+C_2\Rightarrow y=\frac{C_1}{x^2}+C_2x^3$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1'}{x^2}+C_2'x^3=0 \\ -\dfrac{2C_1'}{x^3}+3C_2'x^2=\dfrac{6}{x} \end{cases}\Rightarrow C_1'=-x^5C_2'\Rightarrow 2x^2C_2'+3x^2C_2'=\frac{6}{x}\Rightarrow C_2'=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x^3}\Rightarrow C_2=-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x^2}+\widetilde{C_2}$$

$$C_1'=-\frac{6}{5}x^2\Rightarrow C_1=-\frac{2}{5}x^3+\widetilde{C_1}$$

$$y=\frac{\widetilde{C_1}}{x^2}+\widetilde{C_2}x^3-x$$

$$\begin{cases} \widetilde{C_1}+\widetilde{C_2}=4 \\ \dfrac{\widetilde{C_1}}{4}+8\widetilde{C_2}=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \widetilde{C_1}=\dfrac{116}{31} \\ \widetilde{C_2}=\dfrac{8}{31} \end{cases}$$

$$y=\frac{116}{31x^2}+\frac{8x^3}{31}-x$$

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^2\left(\frac{2(y+h)(y'+h')}{x}-7\frac{(y+h)^2}{x^2}-(y'+h')^2-12\frac{(y+h)}{x}\right)dx$$

$$-\int_1^2\left(\frac{2yy'}{x}-7\frac{y^2}{x^2}-(y')^2-12\frac{y}{x}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2(yh'+y'h+hh')}{x}-7\frac{(2yh+h^2)}{x^2}-\left(2y'h'+h'^2\right)-12\frac{h}{x}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(\left(\frac{2y'}{x}-\frac{14y}{x^2}-\frac{12}{x}\right)h+\left(\frac{2y}{x}-2y'\right)h'\right)dx+\int_1^2\left(\frac{2hh'}{x}-7\frac{h^2}{x^2}-h'^2\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2hh'}{x}-7\frac{h^2}{x^2}-h'^2\right)dx=\int_1^2\left(-6\frac{h^2}{x^2}-h'^2\right)dx\le 0,$$

откуда $y=\frac{116}{31x^2}+\frac{8x^3}{31}-x$ является максимумом. В последнем равенстве мы воспользовались тождеством

$$\int_1^2\left[\frac{2hh'}{x}-\frac{h^2}{x^2}\right]dx=0 \Leftarrow \int_1^2\frac{hh'}{x}dx=\frac{h^2}{x^2}\bigg|_1^2-\int_1^2\left[h\cdot\frac{h'x-h}{x^2}\right]dx=-\int_1^2\frac{hh'}{x}dx+\int_1^2\frac{h^2}{x^2}dx.$$

С 20.1.9. Решим задачу со свободным концом:

$$J(y)=\int_1^3[8yy'\ln x-x(y')^2+6xy']dx\,,\qquad y(3)=15.$$

$$F=8yy'\ln x-x(y')^2+6xy',\qquad F_y=8y'\ln x,\qquad F_{y'}=8y\ln x-2xy'+6x$$

$$\frac{d}{dx}(8y\ln x-2xy'+6x)-8y'\ln x=0$$

$$\frac{8y}{x}+8y'\ln x-2y'-2xy''+6-8y'\ln x=0$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{4}{x^2}y-\frac{3}{x}=0$$

$$y_1=x^2$$

$$\begin{vmatrix}x^2 & y\\ 2x & y'\end{vmatrix}=Ce^{\int-\frac{1}{x}dx}\Rightarrow y'x^2-2xy=\frac{C_1}{x}\Rightarrow y=C(x)x^2\Rightarrow C'x^2\cdot x^2=\frac{C_1}{x}\Rightarrow C=-\frac{C_1}{4x^4}+C_2$$

$$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2x^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{C_1'}{x^2}+C_2'x^2=0\\ -\dfrac{2C_1'}{x^3}+2C_2'x=\dfrac{3}{x}\end{cases}\Rightarrow C_1'=-x^4C_2'\Rightarrow 2xC_2'+2xC_2'=\frac{3}{x}\Rightarrow C_2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}+\widetilde{C_2}$$

$$C_1'=-\frac{3}{4}x^2\Rightarrow C_1=-\frac{x^3}{4}+\widetilde{C_1}$$

$$y=\frac{\widetilde{C_1}}{x^2}+\widetilde{C_2}x^2-x$$

$$y'=-\frac{2\widetilde{C_1}}{x^3}+2\widetilde{C_2}x-1$$

$$\begin{cases}y(3)=18\\ 8y\ln x-2xy'+6x|_{x=1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\widetilde{C_1}}{9}+9\widetilde{C_2}=18\\ -2y'(1)+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\widetilde{C_1}}{9}+9\widetilde{C_2}=18\\ -\widetilde{C_1}+\widetilde{C_2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{C_1}=0\\ \widetilde{C_2}=2\end{cases}$$

$$y=2x^2-x$$

$$J(y+h)-J(h)=\int_1^3[8(y+h)(y'+h')\ln x-x(y'+h')^2+6x(y'+h')]dx$$

$$-\int_1^3[8yy'\ln x-x(y')^2+6xy']dx=$$

$$= \int_1^3 \left[8(yh' + y'h + hh')\ln x - x\left(2y'h' + {h'}^2\right) + 6xh'\right]dx =$$

$$= \int_1^3 [(8y'\ln x)h + (8y\ln x - 2xy' + 6x)h']dx + \int_1^3 \left[8hh'\ln x - x{h'}^2\right]dx =$$

$$= \int_1^3 \left[8hh'\ln x - x{h'}^2\right]dx = \int_1^3 \left[-\frac{4h^2}{x} - x{h'}^2\right]dx \le 0,$$

откуда $y = 2x^2 - x$ является максимумом функционала. Доказательство последнего перехода:

$$\int_1^3 4hh'\ln x\,dx = 4h^2\ln x|_1^3 - \int_1^3 4h\left(\frac{h}{x} + h'\ln x\right)dx = -\int_1^3 4hh'\ln x\,dx - \int_1^3 \frac{4h^2}{x}dx.$$

С 20.1.12. Решим задачу без ограничений:

$$J(y) = \int_1^e \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}\right]dx.$$

$$F = x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}, \qquad F_y = \frac{2y}{x} + \frac{2\ln x}{x}, \qquad F_{y'} = 2xy'$$

$$\frac{d}{dx}(2xy') - \left(\frac{2y}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y - \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$y_1 = x$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int -\frac{1}{x}dx} \Rightarrow xy' - y = \frac{C_1}{x} \Rightarrow y = C(x)x \Rightarrow C'x^2 = \frac{C_1}{x} \Rightarrow C = -\frac{C_1}{2x^2} + C_2$$

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1'}{x} + C_2' x = 0 \\ -\dfrac{C_1'}{x^2} + C_2' = \dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow C_1' = -x^2 C_2' \Rightarrow C_2' = \frac{\ln x}{2x^2} \Rightarrow C_2 = \frac{-\ln x - 1}{2x} + \widetilde{C_2}$$

$$C_1' = -\frac{\ln x}{2} \Rightarrow C_1 = -\frac{x\ln x - x}{2} + \widetilde{C_1}$$

$$y = \frac{\widetilde{C_1}}{x} + \widetilde{C_2}x - \ln x$$

$$y' = -\frac{\widetilde{C_1}}{x^2} + \widetilde{C_2} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} -\widetilde{C_1} + \widetilde{C_2} = 1 \\ -\dfrac{\widetilde{C_1}}{e^2} + \widetilde{C_2} = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = -\dfrac{e}{e+1} \\ \widetilde{C_2} = \dfrac{1}{e+1} \end{cases}$$

$$y = -\frac{e}{e+1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{x}{e+1} - \ln x$$

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^e\left[x(y'+h')^2+\frac{(y+h)^2}{x}+\frac{2(y+h)\ln x}{x}\right]dx-\int_1^e\left[x(y')^2+\frac{y^2}{x}+\frac{2y\ln x}{x}\right]dx=$$

$$=\int_1^e\left[x\left(2y'h'+h'^2\right)+\frac{2yh+h^2}{x}+\frac{2h\ln x}{x}\right]dx=$$

$$=\int_1^e\left[\left(\frac{2y}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)h+(2xy')h'\right]dx+\int_1^e\left[xh'^2+\frac{h^2}{x}\right]dx=\int_1^e\left[xh'^2+\frac{h^2}{x}\right]dx\geq 0.$$

Значит $y=-\frac{e}{e+1}\cdot\frac{1}{x}+\frac{x}{e+1}-\ln x$ — минимум функционала.

Т 4. Исследуем на экстремум функционал, определив знаки приращения:

$$J(y)=\int_1^2[2y+yy'+x(y')^2]dx\,,\qquad y(1)=1.$$

$$F=2y+yy'+x(y')^2,\qquad F_y=2+y',\qquad F_{y'}=y+2xy'$$

$$\frac{d}{dx}(y+2xy')-2-y'=0$$

$$y'+2y'+2xy''-2-y'=0$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x}=0$$

$$y'=u$$

$$u'+\frac{1}{x}u-\frac{1}{x}=0\Rightarrow u=\frac{C(x)}{x}\Rightarrow\frac{C'}{x}=\frac{1}{x}\Rightarrow C=x+C_1\Rightarrow u=\frac{C_1}{x}+1$$

$$y'=\frac{C_1}{x}+1\Rightarrow y=C_1\ln x+C_2+x$$

$$\begin{cases}y(1)=1\\F_{y'}(2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=0\\C_1\ln 2+C_2+2+4\left(\frac{C_1}{2}+1\right)=0\end{cases}\Rightarrow C_1=-\frac{6}{2+\ln 2}$$

$$y=-\frac{6\ln x}{2+\ln 2}+x$$

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^2[2(y+h)+(y+h)(y'+h')+x(y'+h')^2]dx-\int_1^2[2y+yy'+x(y')^2]dx=$$

$$=\int_1^2\left[2h+yh'+y'h+hh'+x\left(2y'h'+h'^2\right)\right]dx=$$

$$=\int_1^2[(2+y')h+(y+2xy')h']dx+\int_1^2\left[hh'+xh'^2\right]dx=\int_1^2\left[hh'+xh'^2\right]dx=\int_1^2\left[xh'^2\right]dx\geq 0.$$

Значит, $y==-\frac{6\ln x}{2+\ln 2}+x$ — минимум функционала. Доказательство последнего перехода:

$$\int_1^2 hh'dx=h^2|_1^2-\int_1^2 hh'dx=-\int_1^2 hh'dx.$$

С 20.2.5. Найдем допустимые экстремали:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2]dx, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$F = (y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2, \quad F_{y_1} = -2y_2, \quad F_{y_2} = -2y_1, \quad F_{y_1'} = 2y_1', \quad F_{y_2'} = 2y_2'$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(2y_1') + 2y_2 = 0 \\ \dfrac{d}{dx}(2y_2') + 2y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = -y_2 \\ y_2'' = -y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y_1 + y_2)'' = -(y_1 + y_2) \\ (y_1 - y_2)'' = y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ y_1 - y_2 = C_3e^x + C_4e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \widetilde{C_1} \sin x + \widetilde{C_2} \cos x + \widetilde{C_3}e^x + \widetilde{C_4}e^{-x} \\ y_2 = \widetilde{C_1} \sin x + \widetilde{C_2} \cos x - \widetilde{C_3}e^x - \widetilde{C_4}e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{C_2} + \widetilde{C_3} + \widetilde{C_4} = 1 \\ \widetilde{C_2} - \widetilde{C_3} - \widetilde{C_4} = -1 \\ \widetilde{C_1} + \widetilde{C_3}e^{\frac{\pi}{2}} + \widetilde{C_4}e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} \\ \widetilde{C_1} - \widetilde{C_3}e^{\frac{\pi}{2}} - \widetilde{C_4}e^{-\frac{\pi}{2}} = -e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{C_1} = 0 \\ \widetilde{C_2} = 0 \\ \widetilde{C_3} = 1 \\ \widetilde{C_4} = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = -e^x$$

С 20.3.2. Исследуем функционал на экстремум:

$$J(y) = \int_0^1 [2e^xy - (y'')^2]dx, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e.$$

$$F = 2e^xy - (y'')^2, \quad F_y = 2e^x, \quad F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = -2y''$$

$$2e^x + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0$$

$$y^{(4)} = e^x \Rightarrow y = e^x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

$$y' = e^x + 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$$

$$\begin{cases} C_4 = 1 \\ C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 + 2C_2 = e \end{cases} \Rightarrow C_1 = e, C_2 = -e$$

$$y = e^x + ex^3 - ex^2$$

$$J(y + h) - J(y) = \int_0^1 [2e^x(y + h) - (y'' + h'')^2]dx - \int_0^1 [2e^xy - (y'')^2]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2e^xh - \left(2y''h'' + h''^2\right)\right]dx$$

С 21.1. Решим изопериметрическую задачу:

$$J(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad \int_0^{\pi} y \sin x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$L = (y')^2 + \lambda y \sin x, \quad F_y = \lambda \sin x, \quad F_{y'} = 2y'$$

$$\frac{d}{dx}(2y') - \lambda \sin x = 0 \Longrightarrow y = C_1 x + C_2 - \frac{\lambda}{2}\sin x$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \\ \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\lambda}{2}\sin x\right)\sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos x = -\left(x\cos x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \, dx\right) = \pi$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = -\frac{\lambda}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = -\frac{\lambda}{4}\pi$$

$$\pi - \frac{\lambda}{4}\pi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow y = x - \sin x$$

$$J(y+h) - J(y) = \int_0^{\pi} [(y'+h')^2]dx - \int_0^{\pi} [(y')^2]dx = \int_0^{\pi} \left[2y'h' + {h'}^2\right]dx = \int_0^{\pi} {h'}^2 dx \geq 0.$$

Значит $y = x - \sin x$ — минимум функционала. Доказательство последнего равенства:

$$\int_0^{\pi} y'h'dx = \int_0^{\pi} y'dh = y'h|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} hy''dx = -\int_0^{\pi} hy''dx = -\int_0^{\pi} h\sin x \, dx = 0.$$

Т 5. Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найдем кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).