Топология 2 Листок 2
(Осень 2022)

Материал: категории, функторы и естественные преобразования, универсальные конструкции, сопряжение, 2-категории, приложения к топологии.

2.1. Пусть C – локально малая категория. Обозначим через

$$\mathrm{PSh}(C) \equiv [C^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \equiv \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$$

категорию функторов из двойственной к C категории в $\mathbf{Set}$ (или, что то же, категорию контравариантных функторов $C \to \mathbf{Set}$). Объект $F \in [C^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ называется предпучком множеств на C; в частности, когда $C = \mathrm{Open}(X)$, X – топологическое пространство, объект F есть предпучок множеств на пространстве X.

A. Докажите контравариантную версию леммы Йонеды: если $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ – предпучок множеств на C, а $c \in C$ – объект, то имеется биекция множеств

$$\mathrm{Nat}(\hom_C(-, c), F) \simeq F(c), \ \ \alpha \mapsto \alpha_c(1_c),$$

естественная по c и F.

B. Покажите, что вложение Йонеды

$$Y : C \to \mathrm{PSh}(C), \ \ c \mapsto Y(c) = \hom_C(-, c)$$

определяет вполне унивалентный функтор.

C. Предпучок F, естественно эквивалентный (т.е. изоморфный в $\mathrm{PSh}(C)$) объекту из образа вложения Йонеды Y, называется представимым предпучком. Покажите, что два представимых предпучка $Y(c)$ и $Y(d)$ изоморфны тогда и только тогда, когда c и d изоморфны.

D. Покажите, что предпучок $F \in \mathrm{PSh}(C)$ представим тогда и только тогда, когда в категории запятой $(Y \downarrow \Delta F)$ существует терминальный объект (здесь $\Delta F : 1 \to \mathrm{PSh}(C)$ – постоянный функтор с образом F).

2.2. Эквивалентностью категорий C, D называется функтор $T : C \to D$, для которого существует функтор $S : D \to C$, такой что $T \circ S \simeq I_D$ и $S \circ T \simeq I_C$ (ср. с определением изоморфизма категорий, где вместо естественных изоморфизмов $\simeq$ требуются равенства тождественным функторам).

Пусть C – категория. Скелетом категории C называется любая ее полная подкатегория A, такая что любой объект из C изоморфен в C ровно одному объекту из A.

Сопряжением-эквивалентностью (adjoint equivalence) между категориями C и D называют сопряжение $\langle T, S; \eta, \epsilon\rangle : C \rightharpoonup D$, в котором единица $\eta : I_C \dot{\to} S \circ T$ и коединица $\epsilon : T \circ S \dot{\to} I_D$ являются естественными изоморфизмами.

A. Пусть C – категория, а A – некоторый ее скелет. Покажите, что вложение $K : A \to C$ является эквивалентностью категорий.

B. Докажите следующую теорему:

Теорема. Следующие утверждения о функторе $S : D \to C$ равносильны:

1. Функтор S является эквивалентностью категорий.

2. S входит в состав сопряжения-эквивалентности $\langle T, S; \eta, \epsilon\rangle : C \rightharpoonup D$.

3. Функтор S полон и унивалентен, а также существенно сюръективен: каждый объект $c \in C$ изоморфен Sa для некоторого объекта $a \in A$.

2.3. Пусть даны категории C и D, функторы $R,\ S,\ T : C \to D$ и естественные преобразования $\sigma : R \dot{\to} S$ и $\tau : S \dot{\to} T$. Их компоненты для каждого $c \in C$ определяют произведения стрелок $(\tau \cdot \sigma)c = \tau c \circ \sigma c$, которые являются, в силу естественности σ и τ, компонентами естественного преобразования $\tau \cdot \sigma : R \dot{\to} T$. Это – операция композиции стрелок в категории функторов D^C, которую здесь мы будем называть вертикальным умножением.

Пусть теперь даны категории C, D, A, функторы S, $T : C \to D$, S', $T' : D \to A$ и естественные преобразования $\tau : S \dot{\to} T$ и $\tau' : S' \dot{\to} T'$. Горизонтальное умножение $\tau' \circ \tau$ определяется следующим образом. Возьмем функторы $S'S$, $T'T : C \to A$ и для объекта $c \in C$ рассмотрим коммутативный (в силу естественности τ) квадрат

$$\begin{tikzcd} S'Sc \arrow[r, "\tau' Sc"] \arrow[d, "S'\tau c"] & T'Sc \arrow[d, "T'\tau c"] \\ S'Tc \arrow[r, "\tau' Tc"] & T'Tc. \end{tikzcd}$$

Возьмем в качестве компоненты $(\tau' \circ \tau)c$ диагональ этого квадрата:

$$(\tau' \circ \tau)c = T'\tau c \circ \tau' Sc = \tau' Tc \circ S'\tau c.$$

A. Проверьте, что определенные выше компоненты $(\tau' \circ \tau)c$ действительно определяют некоторое естественное преобразование $\tau' \circ \tau : S'S \dot{\to} T'T$.

B. Покажите, что операция $(\tau', \tau) \mapsto \tau' \circ \tau$ ассоциативна. Пусть $I_D : D \to D$ – тождественный функтор, а $1_{I_D} : I_D \dot{\to} I_D$ – тождественное естественное преобразование I_D в себя. Проверьте, что $1_{I_D} \circ \tau = \tau$ и $\tau \circ 1_{I_C} = \tau$. Вообще, пусть $1_S : S \dot{\to} S$ обозначает тождественное естественное преобразование функтора S в себя. Пусть $R, S : C \to D$ – функторы, $\sigma : R \dot{\to} S$ – естественное преобразование. Проверьте, что $1_S \cdot \sigma = \sigma$ и $\sigma \cdot 1_R = \sigma$, так что тождественные естественные преобразования являются единицами для вертикального умножения.

C. Часто символ $\circ$ горизонтального умножения опускают, а тождественное естественное преобразование $1_S : S \dot{\to} S$ функтора в себя в горизонтальном умножении обозначают для краткости как S; в частности, естественные преобразования $S' \circ \tau : S' \circ S \dot{\to} S' \circ T$ и $\tau' \circ T : S' \circ T \dot{\to} T' \circ T$ обозначают как $S'\tau$ и $\tau' T$ (с другой стороны, вертикальное умножение $\cdot$ всегда сохраняется). Покажите, что горизонтальное умножение можно определить следующим образом:

$$\tau' \circ \tau = (T'\tau) \cdot (\tau' S) = (\tau' T) \cdot (S'\tau).$$

D. Пусть даны категории C, D, A, функторы $R, S, T : C \to D$, $R', S', T' : D \to A$ и естественные преобразования $\sigma : R \dot{\to} S$, $\tau : S \dot{\to} T$, $\sigma' : R' \dot{\to} S'$, $\tau' : S' \dot{\to} T'$. Докажите, что вертикальное и горизонтальное умножения связаны тождеством (законом чередования):

$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma).$$

Введенные выше операции приводят к следующему определению. *2-категорией* K называется следующий набор данных и аксиом:

1. Совокупность объектов $a, b, c, \ldots$.

2. Для каждой пары объектов a, b, совокупность $K(a, b)$ стрелок (1-стрелок) $f : a \to b$. Как и в обычном случае, объект a называется областью, а b – кообластью стрелки f.

3. Для каждой пары стрелок $f, g : x \to y$, совокупность $K(f, g)$ 2-стрелок $\alpha : f \Rightarrow g$. Стрелка f называется областью, а g – кообластью 2-стрелки α.

4. Для всякой стрелки $f : a \to b$ и всякой стрелки $f' : b \to c$ определена стрелка $f' \circ f : a \to c$, называемая их композицией (определенная таким образом бинарная операция полностью аналогична композиции стрелок в обычной категории).

5. Для всякой 2-стрелки $\alpha : f \Rightarrow g$ $(f, g : a \to b)$ и всякой 2-стрелки $\alpha' : f' \Rightarrow g'$ $(f', g' : b \to c)$ определена 2-стрелка $\alpha' \circ \alpha : f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$ (горизонтальное умножение).

6. Для всякой 2-стрелки $\alpha : f \Rightarrow g$ и всякой 2-стрелки $\beta : g \Rightarrow h$ $(f, g, h : a \to b)$ определена стрелка $\beta \cdot \alpha : f \Rightarrow h$ (вертикальное умножение).

A1. Композиция стрелок (1-стрелок) ассоциативна, и для каждого объекта a существует единичная стрелка $1_a : a \to a$, являющаяся двусторонней единицей относительно композиции.

A2. Вертикальное умножение 2-стрелок ассоциативно, и для каждой 1-стрелки f существует 2-стрелка $1_f : f \Rightarrow f$, являющаяся двусторонней единицей относительно вертикального умножения.

A3. Горизонтальное умножение ассоциативно, и 2-стрелки вида $1_{1_a} : 1_a \Rightarrow 1_a$ являются двусторонними единицами относительно горизонтального умножения.

A4. Горизонтальное произведение двух вертикальных единиц является вертикальной единицей: $1_{f'} \circ 1_f = 1_{f' \circ f}$, $f : a \to b$, $f' : b \to c$.

A5. Вертикальное и горизонтальное умножения удовлетворяют закону чередования: для любых 2-стрелок $\alpha : f \Rightarrow g$, $\beta : g \Rightarrow h$, $\alpha' : f' \Rightarrow g'$, $\beta' : g' \Rightarrow h'$ $(f, g, h : a \to b,\ f', g', h' : b \to c)$ выполнено

$$(\beta' \cdot \alpha') \circ (\beta \cdot \alpha) = (\beta' \circ \beta) \cdot (\alpha' \circ \alpha).$$

(закон чередования, таким образом, позволяет в описанной ситуации однозначно определить 2-стрелки, получающиеся в результате горизонтального и вертикального умножений, независимо от порядка).

Утверждения из пунктов **A** – **D**, таким образом, показывают, что совокупность **Cat** всех (малых) категорий, функторов между ними и естественных преобразований между функторами несет структуру 2-категории.

E. Пусть K – 2-категория, и пусть $f : a \to b$ и $g : b \to a$ – противоположно направленные 1-стрелки. Они называются сопряженными (f слева, g справа), если в K существуют 2-стрелки η и ϵ (единица и коединица):

$$\eta : 1_a \Rightarrow gf, \ \ \epsilon : fg \Rightarrow 1_b,$$

для которых выполнены следующие равенства:

$$(\epsilon f) \cdot (f\eta) = 1_f : f \Rightarrow fgf \Rightarrow f : a \to b$$

$$(g\epsilon) \cdot (\eta g) = 1_g : g \Rightarrow gfg \Rightarrow g : b \to a.$$

Проверьте, что в **Cat** (объекты – категории, 1-стрелки – функторы, 2-стрелки – естественные преобразования) сопряжение 1-стрелок есть сопряжение между функторами.

F. (Теорема Экманна – Хилтона) Пусть S – множества с двумя всюду определенными бинарными операциями:

$$\cdot, \circ : S \times S \to S,$$

имеющими общую двустороннюю единицу e и удовлетворяющими закону чередования:

$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma), \ \ \forall \sigma, \tau, \sigma', \tau' \in S.$$

Тогда операции $\cdot$ и $\circ$ совпадают и коммутативны.

G. Пусть G – топологическая группа с единицей e в качестве отмеченной точки. Если σ, τ – непрерывные пути с началом и концом e, определим поточечное произведение путей $\tau \cdot \sigma$:

$$(\tau \cdot \sigma)(t) = (\tau(t))(\sigma(t)), \ \ 0 \le t \le 1.$$

Проверьте, что поточечное произведение определяет корректную бинарную операцию на $\pi_1(G, e)$ и, пользуясь теоремой Экманна – Хилтона, покажите, что фундаментальная группа топологической группы абелева.

H. Пусть (X, x_0) – топологическое пространство с отмеченной точкой. Как известно, гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ для $n \geq 1$ определяются как группы гомотопических классов непрерывных отображений ($I = [0, 1]$)

$$f : I^n \to X,$$

где гомотопии должны обладать свойством $f_t(\partial I^n) = x_0$, $\forall t$. При $n \geq 2$ групповая операция определяется так:

$$(f \circ g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & t_1 \in [0, 1/2], \\ h(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & t_1 \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Действуя так же как и в предыдущем пункте, определите на $\pi_n(X, x_0)$ $(n \geq 2)$ еще одно умножение, подходящее под условие теоремы Экманна – Хилтона, и получите отсюда, что высшие гомотопические группы топологического пространства абелевы.

2.4. Пусть в категории C дана пара стрелок $f : a \to b$, $g : a \to c$ с общей областью a. Универсальный квадрат (pushout) для $\langle f, g \rangle$ – это коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "u"] \\ c \arrow[r, "v"] & r, \end{tikzcd}$$

такой что для каждого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, "k"] & s \end{tikzcd}$$

существует единственная стрелка $t : g \to s$, для которой $t \circ u = h$, $t \circ v = k$.

A. Опишите универсальные квадраты в категориях **Set**, **Top**, **Grp**.

B. Покажите, что универсальный квадрат является копределом.

C. Пусть в C дана параллельная пара стрелок $f, g : a \to b$. Коуравнитель пары $\langle f, g \rangle$ – это стрелка $u : b \to e$, такая что $u \circ f = u \circ g$ и (универсальность) если для $h : b \to c$ верно, что $h \circ f = h \circ g$, то существует единственная стрелка $h' : e \to c$, для которой $h = h' \circ u$.

Покажите, что если в C всегда существуют коуравнители и копроизведения пар объектов, то в C всегда существуют универсальные квадраты.

2.5. Опишите фундаментальную группу тора с двумя дырками (компактной поверхности рода 2, полученной склеиванием двух копий тора $S^1 \times S^1$ по границе открытого диска, вырезанного из каждой из копий).