Топология 2 Листок 3
(Осень 2022)

Материал: элементы гомологической алгебры.

3.1. Категория C называется предаддитивной, если на каждом ее hom-множестве задана структура абелевой группы с операцией $+$, относительно которой композиция в C билинейна: для любых стрелок $f,\ f' : a \to b$ и $g,\ g' : b \to c$ справедливо равенство

$$(g+g')\circ(f+f') = g\circ f + g\circ f' + g'\circ f + g'\circ f'.$$

Функтор $T : C \to D$ между предаддитивными категориями называется аддитивным, если он индуцирует гомоморфизмы hom-групп.

Покажите, что если $G : A \to X$ – аддитивный функтор между предаддитивными категориями, обладающий левым сопряженным $F : X \to A$, то F также аддитивен, а биекции сопряжения

$$\varphi : \hom_A(Fx, a) \simeq \hom_X(x, Ga)$$

являются изоморфизмами абелевых групп при всех $x \in X,\ a \in A$.

3.2. Пусть A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $\mathbf{Mod}_A$ – категория A-модулей, $T, S : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_A$ – аддитивные функторы, $\mathrm{Hom}(-,-)$ – hom-функтор (аддитивный функтор двух аргументов, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму; он точен слева).

A. Пусть дана последовательность A-модулей и гомоморфизмов $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если для любого модуля X последовательность

$$\mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{f\circ-} \mathrm{Hom}(X,N) \xrightarrow{g\circ-} \mathrm{Hom}(X,P)$$

точна, то исходная последовательность $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ точна.

2. Если для любого модуля X последовательность

$$\mathrm{Hom}(P,X) \xrightarrow{-\circ g} \mathrm{Hom}(N,X) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}(M,X)$$

точна, то исходная последовательность $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ точна.

B. Пусть аддитивные функторы T, S сопряжены друг к другу (T сопряжен слева к S). Пользуясь предыдущим утверждением, покажите, что T точен справа, а S точен слева.

3.3. Пусть $T = T(M_1, \dots, M_r)$ – аддитивный функтор r аргументов, аргумент M_i – модуль над коммутативным кольцом A_i, $T(M_1,\dots,M_r)$ – модуль над коммутативным кольцом A. По некоторым аргументам T ковариантный, по некоторым – контравариантный.

Напомним процедуру построения функтора градуированных модулей по функтору T.

Предполагая, что каждый аргумент $M_i = \oplus_{n_i} M_i^{n_i}$ является градуированный A_i-модулем, рассмотрим r-градуированный A-модуль $T(M_1,\dots,M_r)$,[1] определяя его r-однородные компоненты следующим образом:

$$T^{n_1\dots n_r}(M_1,\dots,M_r) = T(M_1^{a_1 n_1},\dots,M_r^{a_r n_r})$$

(в правой части стоит значение исходного функтора T на однородных компонентах степеней $a_i n_i$, $a_i = +1$ если по i-му аргументу T ковариантен и $a_i = -1$ в противном случае).

[1] Обозначенный ради удобства так же, как и его неградуированная версия – результат применения T к неградуированным модулям $M_1,\dots,M_r$ с той же аддитивной структурой; определяемый таким образом градуированный модуль, вообще, существенным образом отличается от неградуированного $T(M_1,\dots,M_r)$.

Одинарный градуированный модуль $T(M_1, \dots, M_r)$ определяется своими однородными компонентами
$$T^n(M_1, \dots, M_r) = \oplus_{n_1+\dots+n_r=n} T^{n_1\dots n_r}(M_1, \dots, M_r).$$

Если заданы гомоморфизмы градуированных модулей $f_i : M_i \to M_i'$ для ковариантных i и $f_i : M_i' \to M_i$ для контравариантных, имеющие степени p_i, то определим гомоморфизм r-градуированных модулей r-кратной степени $(p_1, \dots, p_r)$
$$T(f_1, \dots, f_r) : T(M_1, \dots, M_r) \to T(M_1', \dots, M_r'),$$
полагая его $(n_1, \dots, n_r)$-компоненту (обозначаемую как $T^{n_1\cdots n_r}(f_1, \dots, f_r)$) равной гомоморфизму
$$(-1)^{\epsilon} T(f_1^{k_1}, \dots, f_r^{k_r}) : T(M_1^{a_1 n_1}, \dots, M_r^{a_r n_r}) \to T((M_1')^{a_1(n_1+p_1)}, \dots, (M_r')^{a_r(n_r+p_r)}),$$
где $\epsilon = \sum_{i<j} n_i p_j$, $k_i = n_i$ для ковариантных агрументов и $k_i = -(n_i + p_i)$ для контравариантных (f^n обозначает однородную компоненту гомоморфизма градуированных модулей).

A. Покажите, что если $h_i = g_i \circ f_i : M_i \to M_i''$ (для контравариантных аргументов $h_i = f_i \circ g_i : M_i'' \to M_i$), где f_i имеют степени p_i, а g_i – степени q_i, то
$$T(h_1, \dots, h_r) = (-1)^{\eta} T(g_1, \dots, g_r) \circ T(f_1, \dots, f_r),$$
где $\eta = \sum_{i<j} p_i q_j$

B. Пусть $M_i = (M_i, d_i)$ – коцепные комплексы. Покажите, что операторы
$$\delta_i = T(1_{M_1}, \dots, d_i, \dots, 1_{M_r})$$
превращают r-градуированный модуль $T(M_1, \dots, M_r)$ в r-кратный комплекс.

C. Если f_i – морфизмы комплексов (степень таких отображений равна нулю), то $T(f_1, \dots, f_r)$ – также морфизм r-кратных комплексов.

D. Пусть для всех $i = 1, \dots, r$ заданы гомотопии $s_i : f_i \simeq f_i'$. Тогда определена гомотопия
$$(t_1, \dots, t_r) : T(f_1, \dots, f_r) \simeq T(f_1' \dots, f_r').$$
Выпишите явно отображения t_i.

3.4. Пусть дана короткая точная последовательность модулей над коммутативным кольцом:
$$0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0,$$
и пусть
$$0 \to X' \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{\Psi} X'' \to 0$$
– такая точная последовательность (коцепных) комплексов, что X', X, X'' – левые комплексы над M', M, M'' соответственно, Φ – отображение над φ, Ψ – отображение над ψ. Всякую такую последовательность комплексов будем называть последовательностью левых комплексов над короткой точной последовательностью модулей. Если в последовательности левых комплексов над короткой точной последовательностью комплексы X', X, X'' являются проективными резольвентами модулей M', M, M'' соответственно, то говорят, что задана проективная резольвента короткой точной последовательности модулей.

Последовательность левых комплексов $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ над короткой точной последовательностью модулей называется *нормальной*, если для каждого n точная последовательность
$$0 \to X_n' \to X_n \to X_n'' \to 0$$

расщепляема. Например, если X'' проективен, то $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ нормальна. В нормальной последовательности можно заменить X_n на прямую сумму $X'_n \oplus X''_n$; соответствующие Φ и Ψ действуют как

$$\Phi(x'_n) = (x'_n, 0), \ \ \Psi(x'_n, x''_n) = x''_n.$$

В этом случае

$$d_n(x'_n, x''_n) = (d'_n x'_n + \Theta_n x''_n, d''_n x''_n), \ \ \epsilon(x'_0, x''_0) = \varphi\epsilon' x'_0 + \sigma x''_0,$$

где

$$\sigma : X''_0 \to M, \ \ \Theta_n : X''_n \to X'_{n-1}$$

– некоторые гомоморфизмы, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon'' = \psi\sigma, \ \ \varphi\epsilon'\Theta_1 + \sigma d''_1 = 0, \ \ d'_{n-1}\Theta_n + \Theta_{n-1}d''_n = 0,$$

равносильным тождествам

$$\epsilon''\Psi_0 = \psi\epsilon, \ \ \epsilon d_1 = 0, \ \ d_{n-1}d_n = 0.$$

Докажите следующие утверждения.

A. Если комплексы X' и X'' проективны, то комплекс X также проективен; если X' и X'' ацикличны, то X также ацикличен. Если X', X'' – проективные резольвенты M', M'' соответственно, то последовательность комплексов является проективной резольвентой последовательности модулей.

B. Для всякой короткой точной последовательности модулей $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$, всякого ацикличного левого комплекса X' над M' и всякого проективного левого комплекса X'' над M'' существует такой левый комплекс X над M и такие отображения Φ и Ψ над φ и ψ соответственно, что получающаяся последовательность $0 \to X' \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{\Psi} X'' \to 0$ точна.

C. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\psi} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\varphi^*} & N & \xrightarrow{\psi^*} & N'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

– коммутативная диаграмма с точными строчками, и пусть

$$0 \to X' \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{\Psi} X'' \to 0, \ \ 0 \to Y' \xrightarrow{\Phi^*} Y \xrightarrow{\Psi^*} Y'' \to 0$$

– нормальные точные последовательности левых комплексов над верхней и нижней строчками этой диаграммы соответственно. Если комплекс X'' проективен, а Y' ацикличен, то для любых морфизмов $F' : X' \to Y'$, $F'' : X'' \to Y''$ над f', f'' существует морфизм $F : X \to Y$ над f, такой что имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\
0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Если G', G, G'' – другая тройка морфизмов над f', f, f'' с теми же свойствами, то для любых гомотопий $s' : F' \simeq G'$ и $s'' : F'' \simeq G''$ существует гомотопия $s : F \simeq G$, такая что для каждого $n \geq 0$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle s'_n} & & \downarrow{\scriptstyle s_n} & & \downarrow{\scriptstyle s''_n} & & \\
0 & \longrightarrow & Y'_{n+1} & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y''_{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

D. Сформулируйте аналоги приведенных выше определений и результатов для правых комплексов и инъективных резольвент.

3.5. Пусть $T = T(M, N)$ – аддитивный функтор двух аргументов (аргументы – модули над коммутативными кольцами, T принимает значения также в модулях над кольцом), ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Если X – инъективная резольвента M, Y – проективная резольвента N, то пополняющие отображения $M \to X$ и $Y \to N$ индуцируют морфизм

$$T(M, N) \to T(X, Y).$$

A. Докажите, что этот морфизм определяет естественное преобразование функторов

$$\tau^0 : T \to R^0 T$$

из исходного функтора в его нулевой правый производный.

B. Докажите, что τ^0 – естественная эквивалентность функторов тогда и только тогда, когда функтор T точен слева.

C. Как звучит аналогичное утверждение для функтора $L_0 T$?