Экзамен по дискретному анализу

2020-2021 летняя сессия

Пункт 1

Определение графа, графов с петлями и кратными ребрами. Ориентированные графы. Лемма о рукопожатиях. Четыре определения дерева и их эквивалентность.

Определение. *Графом* $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т.е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. Таким образом $E \subset \binom{V}{2}$.

Определение. *Ориентированным графом* (без петель и кратных ребер) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые упорядоченные пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом $E \subset \{(x, y) \in V \times V : x \neq y\}$.

Определение. *Цикл* — любой замкнутый маршрут, у которого не повторяются ребра.

Определение. *Простой цикл* — цикл с не повторяющимися вершинами (кроме первой и последней вершин).

Лемма (о рукопожатиях). $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$.

Теорема. Следующие четыре определения эквивалентны:

1. Ациклический связный граф;
2. Граф, у которого любые две вершины соединены единственным маршрутом;
3. Связный граф, у которого число ребер на 1 меньше числа вершин;
4. Ациклический граф, у которого число ребер на 1 меньше числа ребер.

Пункт 2

Код Прюфера. Формула Кэли.

Определение. *Код Прюфера* сопоставляет дереву с вершинами $1, 2, \ldots, n$ последовательность чисел от 1 до n по следующему алгоритму.

Сначала код Прюфера — пустое слово. Пока количество вершин больше двух,

1) выбирается лист v с минимальным номером;
2) в код Прюфера добавляется номер вершины, смежной с v;
3) вершина v и инцидентное ей ребро удаляются из дерева.

Когда осталось две вершины, алгоритм завершает работу.

Утверждение. В коде Прюфера вершина степени d встречается $d - 1$ раз.

Утверждение. Код Прюфера определяет взаимно однозначное соответствие между множеством деревьев с данными n вершинами и множеством слов длины $n - 2$ из чисел от 1 до n.

Теорема (формула Кэли). Число деревьев с n пронумерованными вершинами равна n^{n-2}.

Пункт 3

Точная формула для числа унициклических графов. Асимптотика (б/д).

Определение. Граф называется *унициклическим*, если он становится деревом после удаления некоторого ребра.

Теорема. Количество унициклических графов на n вершинах равно

$$u_n = \sum_{r=3}^{n} C_n^r \cdot \frac{(r-1)!}{2} \cdot F(n,r) = \sum_{r=3}^{n} C_n^r \frac{r!}{2} n^{n-1-r},$$

где $F(n,r) = rn^{n-1-r}$ — число лесов на n вершинах с r деревьями, причем i-му дереву принадлежит вершина i.

Пункт 4

Асимптотика числа унициклических графов.

Утверждение. Верна асимптотика

$$u_n \sim n^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Доказательство.

$$u_n = \sum_{r=3}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{r!}{2} \cdot n^{n-1-r} = \frac{1}{2} \sum_{r=3}^{n} n^{n-1} \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) =$$

$$= \frac{n^{n-1}}{2} \sum_{r=3}^{n} e^{\sum_{j=1}^{r-1} \ln\left(1-\frac{j}{n}\right)} =: \frac{n^{n-1}}{2} S$$

Разобьем S на две суммы:

$$S = \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} \dots + \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} \dots = S_1 + S_2.$$

Используя неравенство

$$\sum_{j=1}^{r-1} \ln\left(1 - \frac{j}{n}\right) \le \sum_{j=1}^{r-1} -\frac{j}{n} = -\frac{r(r-1)}{2n}$$

и что при $r > n^{0.6}$

$$\frac{r(r-1)}{2n} \sim \frac{n^{1.2}}{2n} = \frac{n^{0.2}}{2}$$

имеем

$$S_2 \le \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} < ne^{-\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Также

$$\sum_{j=1}^{r-1} \ln\left(1 - \frac{j}{n}\right) = -\frac{r(r-1)}{2n} + O\left(\frac{r^3}{n^2}\right),$$

поэтому

$$S_1 \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r(r-1)}{2n}} \sim \sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2n}} dx \sim \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

и

$$u_n = \frac{n^{n-1}}{2} S \sim n^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Здесь мы использовали то, что

$$\sum_{r=3}^{[n^{0.6}]} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}},$$

которое верно, поскольку

$$\sum_{r=0}^{2} e^{-\frac{r^2}{2n}} \sim 3 = o\left(\sqrt{n}\right),$$

$$\sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} = \sum_{r=[n^{0.6}]+1}^{n^2} e^{-\frac{r^2}{2n}} + \sum_{r=n^2+1}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2n}} = S_3 + S_4 \to 0.$$

Для доказательства последнего можно аналогично S_2 оценить S_3 и получить

$$S_3 < n^2 e^{-\frac{n^{0.2}}{2}(1+o(1))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

и еще оценить S_4 сверху геометрической прогрессией со знаменателем e^{-n}:

$$\frac{e^{-\frac{(r+1)^2}{2n}}}{e^{-\frac{r^2}{2n}}} = e^{-\frac{r}{n}-\frac{1}{2n}} < e^{-\frac{r}{n}} < e^{-\frac{n^2}{n}} = e^{-n}$$

$$S_4 < e^{-\frac{\left(n^2+1\right)^2}{2n}} \left(1 + e^{-n} + e^{-2n} + \cdots\right) \to 0.$$

Пункт 5

Определение плоских и планарных графов. Формула Эйлера (б/д). Примеры непланарных графов. Критерий Понтрягина-Куратовского планарности графов.

Пункт 6

Пути и циклы. Простые пути и циклы. Критерии эйлеровости графа и ориентированного графа.

Теорема. Граф эйлеровский $\Leftrightarrow \forall v \in V \deg v$ четна.

Пункт 7

Последовательности и графы де Брёйна. Случай алфавита $0,1$ и подслов произвольной длины. Правило 0 лучше 1 (б/д).

Пункт 8

Гамильтоновы пути и циклы. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа.

Определение. Граф *гамильтонов*, если существует простой цикл, проходящий по всем вершинам.

Теорема (признак Дирака). Пусть $G = (V, E)$, $|V| = n$. Пусть $\forall v \deg v \geq \frac{n}{2}$. Тогда G — гамильтонов.

Пункт 9

Вершинная связность и число независимости графа. Признак Эрдёша-Хватала (б/д). Гамильтоновость графа 1-пересечений 3-элементных подмножеств n-элементного множества при всех достаточно больших n.

Определение. Множество $W \subseteq V$ графа $G = (V, E)$ называется *независимой*, если $\forall x, y \in W\ (x, y) \notin E$.

Определение. *Числом независимости* графа $G = (V, E)$ называется размер максимального независимого множества в G:

$$\alpha(G) = \max\{k: \exists W \subseteq V, W - \text{независимое}, |W| = k\}.$$

Определение. *Кликовое число* $\omega(G)$ — размер самого большого полного подграфа в G.

Определение. *Вершинной связностью* называется минимальное количество вершин графа G, удаление которых разваливает граф на отдельные компоненты:

$$\kappa(G) = \min\{k: \exists W, |W| = k: G|_{V\setminus W} \text{ несвязен}\}.$$

Теорема (Эрдёша-Хватала). Пусть $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ и $|V| \geq 3$. Тогда G гамильтонов.

Иллюстрация. Пусть

$$V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\}: |A| = 3\},$$
$$E = \{(A, B): |A \cap B| = 1\}$$

Тогда

$$|V| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6},$$
$$|E| = C_n^3 \cdot 3 \cdot \frac{C_{n-3}^2}{2} \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{n^3}{6} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{n^5}{8}.$$

Оценим $\alpha(G)$. Рассмотрим независимое множество $W \subset V$: $W = \{A_1, \dots, A_k\}$: $|A_i \cap A_j| \neq 1$. Каждому A_i сопоставим n-мерный вектор x_i (например, $\{1, 2, 4\}$ соответствует $x_i = (1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$). Тогда W независимое множество $\Leftrightarrow x_1, \dots, x_k$ ЛНЗ над $\mathbb{Z}_2$. Значит $\alpha(G) \leq n$.

Оценим $\kappa(G)$ с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть дан $G = (V, E)$. Пусть $u, v \in V$. Пусть $f(u, v)$ — количество общих соседей u и v. Тогда $\kappa(G) \geq \min\limits_{u,v \in V} f(u, v)$.

Если Б.О.О.

1. $u = \{1, 2, 3\}$, $v = \{4, 5, 6\}$, то $f(u, v) = 3 \cdot 3 \cdot (n - 6) \sim 9n$;
2. $u = \{1, 2, 3\}$, $v = \{3, 4, 5\}$, то $f(u, v) = C_{n-5}^2 + 2 \cdot 2 \cdot (n - 5) \sim \frac{n^2}{2}$;
3. $u = \{1, 2, 3\}$, $v = \{2, 3, 4\}$, то $f(u, v) = 2 \cdot C_{n-4}^2 + n - 4 \sim n^2$.

При достаточно больших n имеем $\kappa(G) \geq 9n > n \geq \alpha(G)$, а значит G гамильтонов.

Пункт 10

Вершинная связность и число независимости графа. Признак Эрдёша-Хватала.

Доказательство. Предположим, что в G нет циклов. Тогда поскольку $\kappa(G) \geq \alpha(G) \geq 1$, то G связный, а значит G дерево. С одной стороны, по $|V| \geq 3$ у G есть хотя бы два листья: $\alpha(G) \geq 2$. С другой стороны, $\kappa(G) = 1$ — противоречие с условием.

Значит в G цикл есть. Рассмотрим (любой) самый длинный простой цикл и предположим, что он не покрывает все вершины:

$$C = \{x_1, \dots, x_k\}, |V| = n, k < n.$$

Пусть G' — граф, полученный из G удалением вершин C со всеми примыкающими им ребрами. Пусть W — множество вершин любой компоненты связности G'. Введем обозначение

$$N_W(G) = \{y \in V \setminus W : \exists z \in W : (y, z) \in E(G)\}$$

— множество соседей вершин W из $V \setminus W$.

Утверждение 1. $N_W(G) \subseteq C$.

Утверждение 2. $N_W(G) \neq C$.

Утверждение 3. $\kappa(G) \leq |N_W(G)|$.

Определим $M = \{x_{i+1} : x_i \in N_W(G)\}$. Понятно, что $|M| = |N_W(G)|$.

Утверждение 4. M — независимое множество.

Пункт 12

Соотношения между хроматическим числом, числом независимости и кликовым числом.

Определение. *Хроматическое число*

$$\chi(G) = \min\{\chi : V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i\ \forall x, y \in V_i\ (x, y) \notin E\}.$$

Имеем $\chi(G) \geq \omega(G)$, $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ и $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Пункт 13

Числа Рамсея $R(s, t)$: точные значения для $s + t \leq 7$. Рекуррентная верхняя оценка Эрдёша-Секереша.

Определение. *Числом Рамсея* называется ($s, t \in \mathbb{N}$)

$$R(s, t) = \min\{n \in \mathbb{N} : \forall G = (V, E), |V| = n \text{ либо } \omega(G) \geq s, \text{либо } \alpha(G) \geq t\}.$$

Имеем $R(1, t) = 1$, $R(2, t) = t$, $R(3, 1) = 1$, $R(3, 2) = 3$, $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$.

$R(s, t) = R(t, s)$, $R(s, s)$ называется диагональным.

Теорема (Эрдеш-Секереш, 1935). $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$.

Доказательство. Пусть $n = R(s, t - 1) + R(s - 1, t)$. Рассмотрим произвольный G на n вершинах. Рассмотрим любую вершину x. Либо из нее выходят $\geq R(s - 1, t)$ ребер, либо из нее выходят $\geq R(s, t - 1)$ антиребер. Б.о.о. верно первое. Тогда число вторых концов ребер из x хотя бы $R(s - 1, t)$ и в этом индуцированном подграфе либо есть K_{s-1}, который с x составит K_s, либо есть $\overline{K_t}$.

Следствие. $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$.

Доказательство. Индукция по s и t.

Пункт 14

Следствие рекуррентной верхней оценки Эрдеша-Секереша для недиагональных и диагональных чисел Рамсея. Уточнение Конлона (б/д). Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея с помощью простого вероятностного метода.

Теорема. $R(s,s) > 2^{\frac{s}{2}}$.

Доказательство. Рассмотрим случайный граф $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$ $(n = 2^{s/2})$. Рассмотрим все s-элементные подмножества его вершин: $A_1, \dots, A_{C_n^s}$. Рассмотрим события $\mathcal{A}_i = \{A_i \text{ образует клику или антиклику в } G(n,1/2)\}$. Имеем $P(\mathcal{A}_i) = 2^{1-C_s^2}$ и

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{C_n^s} \mathcal{A}_i\right) \le C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} \le \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s(s-1)}{2}} = \frac{2^{\frac{s^2}{2}}}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \frac{2^{\frac{s}{2}+1}}{s!} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Можно подставить вместо n и большее число: $n = \frac{s2^{s/2}}{e\sqrt{2}}$,

$$\frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \frac{s^s \cdot 2^{\frac{s^2}{2}} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}}}{e^s \cdot 2^{\frac{s}{2}} \cdot \left(1+o(1)\right)\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s} = \frac{2}{\left(1+o(1)\right)\sqrt{2\pi s}} \to 0.$$

Следствие. $R(s,s) \ge \left(1+o(1)\right)\frac{s2^{s/2}}{e\sqrt{2}}$.

Теорема. $R(s,s) > n - C_n^s 2^{1-C_s^2}$.

Доказательство. Пусть $X(G)$ — число s-клик и s-антиклик в G. Тогда $EX = C_n^s 2^{1-C_s^2}$. Значит $\exists G\colon X(G) \le EX$. Рассмотрим G и из каждой s-клики в нем удалим одну вершину, и из каждой s-антиклики в нем удалим одну вершину.

Следствие. $R(s,s) \ge \left(1+o(1)\right)\frac{s2^{s/2}}{e}$.

Пункты 15-16

Двудольные числа Рамсея. Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: $2^k k\left(1+o(1)\right)$ с доказательством, $2^{k+1}\log_2 k\left(1+o(1)\right)$ — только формулировка.

Двудольные числа Рамсея. Верхняя оценка Конлона для двудольных чисел Рамсея: $2^k k\left(1+o(1)\right)$ — только формулировка, $2^{k+1}\log_2 k\left(1+o(1)\right)$ с доказательством.

Определение. *Двудольное число Рамсея*

$$b(s,t) = \min\left\{n \in \mathbb{N}\colon \begin{matrix} \forall \text{раскраске ребер } K_{n,n} \text{ в красный и синий цвета} \\ \text{либо найдется красный } K_{s,s}, \text{либо синий } K_{t,t} \end{matrix}\right\}.$$

Обозначим $G_{m,n} \subseteq K_{m,n}$ двудольный граф на долях по m и n вершин. *Плотностью* назовем

$$\frac{\left|E\left(G_{m,n}\right)\right|}{mn} = p \in [0,1].$$

Лемма. Пусть m, n, r, s, p таковы, что $nC_{mp}^r > (s-1)C_m^r$, тогда $\forall G_{m,n}$ с плотностью p найдется K_{rs}. ($C_x^r = \frac{x(x-1)\dots(x-r+1)}{r!}$).

Доказательство. Предположим, что в $G_{m,n}$ нет $K_{r,s}$. Посчитаем, сколько в $G_{m,n}$ подграфов $K_{r,1}$. Их $\le (s-1)C_m^r$. С другой стороны, пусть $d_1, \dots, d_n$ — степени нижних вершин в $G_{m,n}$. Тогда $K_{r,1}$ входит в $G_{m,n}$ $C_{d_1}^r + \dots + C_{d_n}^r$ раз.

$$\frac{C_{d_1}^r + \dots + C_{d_n}^r}{n} \ge C_{\frac{d_1+\dots+d_n}{n}}^r \ge C_{\frac{mnp}{n}}^r = C_{mp}^r,$$

$$C_{d_1}^r + \dots + C_{d_n}^r \ge nC_{mp}^r > (s-1)C_m^r$$

— противоречие.

Лемма. Пусть $k \to \infty$, $m = m(k) \to \infty$, $n = n(k) \to \infty$, $r = r(k) \to \infty$, $s = s(k) \to \infty$, $p = p(k) \geq p_0 > 0$, $r^2 = o(m)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 : \forall k \geq k_0$ если $n > (1+\varepsilon)(s-1)p^{-r}$, то в любом $G_{m,n}$ с плотностью p есть $K_{r,s}$.

Доказательство.

$$\frac{n(mp)^r}{r!}\big(1+o(1)\big) > (s-1)\frac{m^r}{r!}\big(1+o(1)\big)$$

$$n > p^{-r}(s-1)\big(1+o(1)\big).$$

Теорема. $b(k,k) < 2^k k\big(1+o(1)\big)$, $b(k,k) \leq 2^{k+1}\log_2 k\,\big(1+o(1)\big)$.

Доказательство. 1) $b(k,k) \leq 2^k k(1+\varepsilon)$, $k \geq k_0$. Пусть $n = 2^k k(1+\varepsilon)$. Нужно доказать, что при любой раскраске ребер $K_{n,n}$ в красный и синий цвета существует одноцветный $K_{k,k}$. Либо красный граф $G^r_{m,n}$, либо синий граф $G^b_{m,n}$ имеет плотность $p \geq 1/2$. Тогда

$$n = 2^k k(1+\varepsilon) > (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \geq (s-1)p^{-r}.$$

2) $b(k,k) \leq 2^{k+1}\log_2 k\,(1+\varepsilon) = n$. Красим $K_{n,n}$ в красный и синий цвета. Вершину назовем *красной*, если из нее выходят не менее красных ребер, чем синих, и *синей*, если выходящих синих ребер меньше, чем красных. Б.о.о. в нижней доле красных вершин $\geq n/2$. Рассмотрим граф K_{m_1,n_1}, верхняя доля которого совпадает с верхней долей $K_{n,n}$ ($n = m_1$), а нижняя доля — с красными вершинами нижней доли $K_{n,n}$ ($n_1 = n/2$). Рассмотрим граф G_{m_1,n_1} с красными ребрами. Его плотность $p \geq 1/2$ (каждая вершина нижней доли вверх отправляет не менее половины красных ребер). Пусть $r_1 = k - 2\log_2 k$, $s_1 = k^2\log_2 k$, тогда

$$\frac{2^{k+1}(1+\varepsilon)\log_2 k}{2} > (k^2\log_2 k - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_2 k - k}(1+\varepsilon')$$

и по лемме есть $K_{r_1,s_1} \subseteq G_{m_1,n_1}$. Рассмотрим граф G_{m_2,n_2} с верхней долей, совпадающей с нижней долей G_{m_1,n_1} ($m_2 = k^2\log_2 k$), и с нижней долей, совпадающей с дополнением верхней доли графа G_{m_1,n_1} в $K_{n,n}$ ($n_2 = n - (k - 2\log_2 k) = m_1 - r_1$). Пусть $r_2 = k$, $s_2 = 2\log_2 k$. Каждая вершина из S_1 (верхняя доля G_{m_2,n_2}) отправляет в множество A (нижняя доля) хотя бы $\frac{n}{2} - k + 2\log_2 k > \frac{n}{2} - k$ красных ребер. Значит плотность G_{m_2,n_2}

$$p \geq \frac{\frac{n}{2} - k}{n - k + 2\log_2 k} > \frac{\frac{n}{2} - k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}.$$

Сравним

$$n\big(1+o(1)\big) \text{ vs } (1+\varepsilon')(2\log_2 k)\big(1+o(1)\big)\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^k}\right)^{-k}$$

$$2^{k+1}\log_2 k\,(1+\varepsilon)\big(1+o(1)\big) > \big(1+\mathrm{o}(1)\big)(1+\varepsilon')(2\log_2 k)2^k.$$

Лемма завершает доказательство.

Пункты 17-18

Конструктивная нижняя оценка Франкла-Уилсона для $R(s,s)$. Лемма для кликового числа без доказательства.

Конструктивная нижняя оценка Франкла-Уилсона для $R(s,s)$. Лемма для числа независимости без доказательства.

Рассмотрим граф $G = G(n,3,1)$. Имеем $\alpha(G) \le n$, $\omega(G) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $|V| = C_n^3 \sim n^3/6$. Отсюда $R(n+1,n+1) > C_n^3$ или $R(s,s) > \frac{s^3}{6}\big(1+o(1)\big)$.

Теорема (Франкл, Уилсон, 1981). $R(s,s) > \left(e^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}}$.

Доказательство. Пусть p — простое число, $m \coloneqq p^3$, $k \coloneqq p^2$, $V = \{\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \cdots x_m = k\}$, $E = \big\{\{\bar{x},\bar{y}\} : (\bar{x},\bar{y}) \equiv 0(p), \bar{x} \ne \bar{y}\big\}$.

Лемма 1. $\alpha(G) \le \sum_{k=0}^{p-1} C_m^k$.

Лемма 2. $\omega(G) \le \sum_{k=0}^{p} C_m^k$.

Положим $s \coloneqq \sum_{k=0}^{p} C_m^k + 1$. Тогда $\alpha(G) < s$, $\omega(G) < s$. Имеем $n = C_m^k$, поэтому $R(s,s) > n$.

$$n = C_{p^3}^{p^2} = \frac{p^3(p^3-1)\dots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!} = \frac{\left(p^{3(1+o(1))}\right)^{p^2}}{\left(p^{2(1+o(1))}\right)^{p^2}} = p^{p^2(1+o(1))}$$

$$1 + C_m^p < s < 1 + (p+1)C_m^p$$

$$C_m^p = C_{p^3}^p = \frac{p^3(p^3-1)\dots(p^3-p+1)}{p!} = p^{3p(1+o(1)) - p(1+o(1))} = p^{2p(1+o(1))}.$$

$$s = p^{2p(1+o(1))}, \qquad n = p^{p^2(1+o(1))}$$

$$\ln s = 2p\big(1+o(1)\big)\ln p$$

$$\ln^2 s = 4p^2\big(1+o(1)\big)\ln^2 p$$

$$\ln\ln s = \ln 2 + \ln p + \ln\big(1+o(1)\big) + \ln\ln p = \big(1+o(1)\big)\ln p$$

$$\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s} = 4p^2 \ln p\,\big(1+o(1)\big)$$

$$\ln n = p^2\big(1+o(1)\big)\ln p$$

$$\ln n \sim \frac{\ln^2 s}{4\ln\ln s}$$

$$n = \big(e+o(1)\big)^{\frac{\ln^2 s}{4\ln\ln s}}.$$

Пункт 20

Гиперграфы. Гиперграфы t-пересечений. Теорема Эрдёша-Ко-Радо (о максимальном числе ребер в гиперграфе 1-пересечений).

Определение. *Гиперграф* — пара $H = (V, E)$, где $E \subseteq 2^V$, $\forall A \in E\ |A| \geq 2$. Если $|A| = r$ для всех $A \in E$, то граф называется r-*однородным*.

Определение. $f(n,r,s) = \max\left\{f\colon \begin{matrix} \exists H = (V,E)\colon |V| = n, H — r - \text{однородный}, \\ \forall A, B \in E\ \ |A \cap B| \geq s \text{ и } |E| = f \end{matrix}\right\}$.

Определение. $h(n,r,s) = \max\left\{h\colon \begin{matrix} \exists H = (V,E)\colon |V| = n, H — r - \text{однородный}, \\ \forall A, B \in E\ \ |A \cap B| \leq s \text{ и } |E| = h \end{matrix}\right\}$.

Определение. $m(n,r,s) = \max\left\{m\colon \begin{matrix} \exists H = (V,E)\colon |V| = n, H — r - \text{однородный}, \\ \forall A, B \in E\ \ |A \cap B| \neq s \text{ и } |E| = m \end{matrix}\right\}$.

Теорема. $h(n,r,s) \leq \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.

Доказательство. Имеем $\{A_1, \dots, A_h\}$ $\forall i,j\ |A_i \cap A_j| \leq s$, $\forall i\ |A_i| = r$, $A_i \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим $\mathcal{A}_i$ — все $s+1$-элементные подмножества ребра A_i. Из $|A_i \cap A_j| \leq s$ получаем, что $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$. Имеем

$$hC_r^{s+1} = |\mathcal{A}_1| + \dots + |\mathcal{A}_h| = \left|\bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{A}_i\right| \leq C_n^{s+1}.$$

Теорема (Рёдль, 1981). Если $r, s = \text{const}$, $n \to \infty$, то $h(n,r,s) \sim \frac{C_n^{s+1}}{C_r^{s+1}}$.

Теорема (Эрдеша-Ко-Радо). $f(n,r,1) = C_{n-1}^{r-1}$, $r \leq n/2$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_t\}$ — ребра r-однородного гиперграфа, где $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, $|F_i| = r \leq n/2$.

Рассмотрим вспомогательную конструкцию $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, где

$$A_1 = \{1, \dots, r\}, \qquad A_2 = \{2, \dots, r+1\}, \qquad \dots, \qquad A_n = \{n, 1, \dots, r-1\}.$$

Лемма. $|\mathcal{F} \cap \mathcal{A}| \leq r$.

Доказательство. Б.О.О. $A_1 \in \mathcal{F}$. Перечислим непересекающиеся пары из $\mathcal{A}$, но пересекающиеся с A_1: (A_2, A_{n-r+2}), (A_3, A_{n-r+3}), …, (A_r, A_{n-r+r}). При этом из каждой пары в $\mathcal{F}$ попадает максимум один из множеств, следовательно $|\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| \leq (r-1) + 1 = r$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь всевозможные $n!$ перестановки чисел $1, \dots, n$ и для каждой перестановки σ определим $\mathcal{A}_\sigma$. Также определим индикатор

$$I(F_i, \sigma) = \begin{cases} 1, & F_i \in \mathcal{A}_\sigma \\ 0, & F_i \notin \mathcal{A}_\sigma \end{cases}.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{\sigma} I(F_i, \sigma) = \sum_{\sigma} \sum_{i=1}^{t} I(F_i, \sigma) = \sum_{\sigma} |\mathcal{A}_\sigma \cap \mathcal{F}| \leq n! \cdot r.$$

Также

$$\sum_{\sigma} I(F_i, \sigma) = n \cdot r! \cdot (n-r)!,$$

следовательно

$$t \cdot n \cdot r! \cdot (n-r)! \leq r \cdot n! \Longrightarrow t \leq C_{n-1}^{r-1}.$$

Пункт 21

История последовательных продвижений: теорема Эрдёша-Ко-Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе-Хачатряна. Все б/д, но с подробными комментариями. Нужно продемонстрировать четкое понимание, что за параметры выбираются в теореме АХ: когда эта теорема превращается в ЭКР; когда оценка становится тривиальной (C_n^k); примеры конструкций, в которых можно явно посчитать, что оценка ЭКР не самая лучшая и АХ ее превосходит.

Теорема (ЭКР). $f(n,r,s) = C_{n-s}^{r-s}$, $n \geq n_0(r,s)$.

Теорема (Франкл, 1978). $s \geq 15 \Longrightarrow \min n_0(r,s) = (r-s+1)(s+1)$.

Теорема (Уилсон, 1984). Предыдущая теорема верна для всех s.

Теорема (Алсведе-Хачатрян, 1996). Пусть $2r - n < s$. Пусть $k \in \mathbb{N}$:

$$(r-s+1) \cdot \left(2 + \frac{s-1}{k+1}\right) \leq n < (r-s+1) \cdot \left(2 + \frac{s-1}{k}\right).$$

Тогда

$$f(n,r,s) = |\{F \subset \{1, \dots, n\} : |F| = r, |F \cap \{1, \dots, s+2k\}| \geq s+k\}| = \sum_{i=s+k}^{s+2k} C_{2s+k}^{i} C_{n-s-2k}^{r-i}.$$

Пункт 22

Системы общих представителей (с.о.п.). «Тривиальные» нижние и верхние оценки.

Обозначим $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$, $M_i \subset \mathcal{R}_n$.

Определение. *Вершинное покрытие* (*система общих представителей*) — это любое $S \subset \mathcal{R}_n$: $\forall i\ M_i \cap S \neq \emptyset$.

Будем рассмотреть случай $|M_i| = k\ \forall i$. Пусть $\tau(\mathcal{M}) = \min|S|$.

Утверждение. $\forall n,s,k\ \forall \mathcal{M}\ \tau(\mathcal{M}) \leq \min\{s, n-k+1\}$.

Утверждение. $\forall n,s,k\ \exists \mathcal{M}$: $\tau(\mathcal{M}) \geq \min\left\{s, \left[\frac{n}{k}\right]\right\}$.

Пункт 23

Верхняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью жадного алгоритма.

Теорема. $\forall n,k,s\ \exists \mathcal{M}$: $\tau(\mathcal{M}) \leq \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1$.

Доказательство. 1. $s \leq \frac{n}{k}$. В этом случае $\tau(\mathcal{M}) \leq s \leq \frac{n}{k}$.

2. $\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} \geq n$. Тогда $\tau(\mathcal{M}) \leq n-k+1 \leq n \leq \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$.

3. $s > \frac{n}{k}$, $n < \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$. $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$. Запустим жадный алгоритм: первым шагом выберем

$$v_1 \in \mathcal{R}_1 : |\{i : v_1 \in M_i\}| = \max_v |\{i : v \in M_i\}| =: \rho_1.$$

Двойным счетом получаем $\rho_1 n \geq sk$ или $\rho_1 \geq \frac{sk}{n}$. Удаляем из $\mathcal{M}$ все ρ_1 множеств. Остается система множеств $\mathcal{M}_1$ с мощностью $|\mathcal{M}_1| = s_1 = s - \rho_1$. Снова жадно ищем v_2, $\rho_2 \geq \frac{s_1 k}{n-1} > \frac{s_1 k}{n}$.

После $N = \left[\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right] + 1$ шагов наберем $v_1, \dots, v_N$. Имеем

$$s_N = s_{N-1} - \rho_N \le s_{N-1} - \frac{s_{N-1}k}{n} = s_{N-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) \le \dots \le s\left(1 - \frac{k}{n}\right)^N \le s\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}} \le$$

$$\le se^{-\frac{k}{n}\cdot\frac{n}{k}\cdot\ln\frac{sk}{n}} = \frac{n}{k}.$$

Значит, выбирав по одному элементу из оставшихся s_N множеств получим

$$\tau(\mathcal{M}) \le \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + 1 + \frac{n}{k}.$$

Пункт 24

Конструктивная нижняя оценка размера минимальной с.о.п.

Теорема. Пусть $n \ge 4$, $k \le n/4$, s таково, что $k \ge \ln\frac{sk}{n} \ge 2$. Тогда $\exists \mathcal{M}$: $\tau(\mathcal{M}) \ge \frac{1}{32}\cdot\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$.

Доказательство. Пусть $m := \left[\frac{1}{2}\ln\frac{sk}{n}\right]$. Рассмотрим множество $\{1, \dots, 2m\}$ и его m-элементные подмножества $N_1, \dots, N_{C_{2m}^m}$. Тогда $\tau(\{1, \dots, 2m\}) = m + 1$. Рассмотрим $\{1, \dots, 2m\} \sqcup \{2m+1, \dots, 4m\} \sqcup \dots \sqcup \{2(q-1)m + 1, \dots, 2qm\}$, где $q = [2k/m]$. Пусть $N_1^j, \dots, N_{C_{2m}^m}^j$ — m-элементные подмножества j-го из объединяемых множеств. Рассмотрим множества $M_1 = N_1^1 \sqcup N_1^2 \sqcup \dots \sqcup N_1^q$, $M_2 = N_2^1 \sqcup N_2^2 \sqcup \dots \sqcup N_2^q$, …, $M_{C_{2m}^m} = N_{C_{2m}^m}^1 \sqcup \dots \sqcup N_{C_{2m}^m}^q$. Имеем $\tau\left(\{M_1, \dots, M_{C_{2m}^m}\}\right) = m + 1$ и $|M_i| = qm \ge k$. $2qm \le 2\cdot\frac{2k}{m}\cdot m = 4k \le n$, значит конструкция корректна. Имеем

$$C_{2m}^m < 2^{2m} \le 2^{\ln\frac{sk}{n}} < e^{\ln\frac{sk}{n}} = \frac{sk}{n},$$

значит можем увеличить конструкцию на $\frac{n}{k}$ раз. Пусть $t = \left[\frac{n}{2qm}\right]$. Размножим конструкцию из $\{M_1, \dots, M_{C_{2m}^m}\}$ t раз. Пусть в j-м множестве попали $\left\{M_1^j, \dots, M_{C_{2m}^m}^j\right\}$. Имеем $\left|M_i^j\right| \ge k$. Соберем все множества вместе: $M' = \left\{M_1^1, \dots, M_{C_{2m}^m}^1, \dots, M_1^t, \dots, M_{C_{2m}^m}^t\right\}$.

$$|M'| = t \cdot C_{2m}^m \le \frac{n}{2qm}\cdot C_{2m}^m \le \frac{n}{2k}\cdot\frac{sk}{n} = \frac{s}{2} < s.$$

$$\tau(M') \ge mt \ge \frac{1}{4}\ln\frac{sk}{n}\cdot\frac{n}{4qm} \ge \frac{1}{4}\ln\frac{sk}{n}\cdot\frac{n}{4\cdot 2k} = \frac{1}{32}\cdot\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}.$$

Выбросим из M_i^j все лишние элементы так, чтобы после этого мощность каждого из них стала k. Получаем M'' из M'. Докидываем новые множества так, чтобы мощность их системы стала s. Получаем M из M''. В M ровно s множеств, все они k-элементные, а τ не превосходит нужной величины.

Пункт 25

Вероятностная нижняя оценка размера минимальной с.о.п. Следствие из нее.

Теорема. Пусть даны любые n, k, s. Пусть l таково, что $C_n^l \cdot \frac{C_{C_n^k - C_{n-l}^k}^s}{C_{C_n^k}^s} < 1$. Тогда $\exists M = \{M_1, \dots, M_s\}$: $|M_i| = k$, $\tau(M) > l$.

Доказательство. Рассмотрим случайный M. Число совокупностей — $C_{C_n^k}^s$. Рассмотрим события $A_1, \dots, A_{C_n^l}$, A_i: i-е l-элементное подмножество $\{1, \dots, n\}$ является с.о.п. для случайного M. Имеем, что

$$P(A_i) = \frac{C^s_{C_n^k - C_{n-l}^k}}{C^s_{C_n^k}}.$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{C_n^l} A_i\right) \le C_n^l P(A_i) < 1$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{C_n^l} \overline{A_i}\right) > 0.$$

Теорема. Пусть $n \to \infty$, $s = s(n) \to \infty$, $k = k(n) \to \infty$, $\frac{sk}{n} \to \infty$, $k^2 = o(n)$, $\ln\frac{sk}{n} = o(k)$, $\ln\ln k = o\left(\ln\frac{sk}{n}\right)$. Тогда $\exists n_0$: $\forall n \ge n_0$ $\exists M$: $\tau(M) \ge \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln\frac{sk}{n} - \frac{n}{k}\ln\ln k - \frac{3n}{k}$.

Доказательство. ԵՍ ՍՐԱ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ ՉԵՄ ԳՐԵԼՈՒ:

Пункт 26

Нижняя оценка размера минимальной с.о.п. с помощью обобщенных с.о.п. Не требуется проверять, что определенное значение l подходит под условие леммы.

Теорема. Пусть даны n, k, s, l. Пусть $\bar{n} = C_n^k$, $\bar{k} = C_{n-l}^k$, $\bar{s} = C_n^l$. Пусть

$$\max\left\{\frac{\bar{n}}{\bar{k}}, \frac{\bar{n}}{\bar{k}}\ln\frac{\bar{s}\bar{k}}{\bar{n}}\right\} + \frac{\bar{n}}{\bar{k}} + 1 \le s.$$

Тогда $\exists M$: $\tau(M) > l$.

Доказательство. Мы интересуемся k-элементными подмножествами $\{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество $\{1, \dots, C_n^k\} = \{1, \dots, \bar{n}\}$ номеров k-элементных подмножеств $K_1, \dots, K_{C_n^k}$ в исходном множестве. Пусть $L_1, \dots, L_{C_n^l = \bar{s}}$ — l-элементные подмножества $\{1, \dots, n\}$. Рассмотрим отображение $L_i \mapsto \Lambda_i \coloneqq \{\nu : K_\nu \cap L_i = \emptyset\}$. Понятно, что $|\Lambda_i| = \bar{k}$. По условию $\tau = \tau(\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\bar{s}}\}) \le s$. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_\tau$ — конкретная минимальная с.о.п. Рассмотрим $M' = \{K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_\tau}\}$. Проверим, правда ли, что $\tau(M') > l$? Рассмотрим произвольное l-элементное множество. Это какое-то L_i. Предположим, что $L_i \cap K_{\sigma_\nu} \ne \emptyset$ $\forall \nu = 1, \dots, \tau$. Значит $\sigma_\nu \notin \Lambda_i$ $\forall \nu = 1, \dots, \tau$ — противоречие.

Пункт 27

С.о.п. в геометрии (теорема о треугольниках на плоскости, б/д). Размерность Вапника-Червоненкиса. Теорема Радона (б/д). Подсчет размерности семейства полупространств. Лемма о числе областей в пространстве заданной мощности и размерности. Лемма о размерности измельчения (достаточно доказать существование верхней оценки, не обязательно такой, как на лекции).

Рассмотрим $X \subset \mathbb{R}^2$, $|X| < \infty$. Рассмотрим гиперграф $(X, \{M : \exists\Delta\ \Delta \cap X = M\})$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим M: $|M| \ge \varepsilon|X|$.

Теорема. $\forall X$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$с.о.п. размера $\le \frac{500}{\varepsilon}\log_2\frac{500}{\varepsilon}$.

Определение. *Ранжированное пространство* — пара (S, R), где S — любое множество, а R — любой набор подмножеств S. Пусть $A \subseteq S$. Рассмотрим $\mathrm{Pr}_A R \coloneqq \{r \cap A : r \in R\}$. Образуется ранжированное пространство $(A, \mathrm{Pr}_A R)$. A *дробится* R, если $\mathrm{Pr}_A R = 2^A$. *Размерностью Вапника-Червоненкиса* называется

$$VC(S, R) = \max\{m : \exists A \subseteq S, |A| = m, A \text{ дробится } R\}.$$

Пример. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — множество всех открытых полупространств.

Имеем $VC(\mathbb{R}^1, \mathcal{H}) = 2$, $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}) = 3$.

Теорема (Радона). Если в $\mathbb{R}^n$ есть $d \geq n+2$ точек, то их множество можно разбить на 2 части, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Значит $VC(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) \leq n+1$. Симплекс доказывает, что $VC(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) = n+1$.

Лемма 1. Пусть (S, R): $VC = d$, $|S| = n$. Тогда

$$|R| \leq g(n, d) \coloneqq \sum_{k=0}^{d} C_n^k.$$

Доказательство. Индукция по n и d.

База: $n = 0$; $d = 0$.

Шаг: (S, R), $|S| = n$, $VC = d$. Пусть $x \in S$. Рассмотрим 2 новых пространства $(S \setminus \{x\}, R_1)$ и $(S \setminus \{x\}, R_2)$, где $R_1 = \{r \setminus \{x\} : r \in R\}$ и $R_2 = \{r \in R : r \cup \{x\} \in R, x \notin r\}$. Тогда $|R| = |R_1| + |R_2|$. Достаточно доказать, что $|R_1| \leq g(n-1, d)$, $|R_2| \leq g(n-1, d-1)$. Для R_1 очевидно по предположению индукции. Осталось проверить, что $VC(S \setminus \{x\}, R_2) \leq d-1$. Предположим, что $\exists A \subseteq S \setminus \{x\}$: $|A| = d$ и A дробится R_2. Тогда тем более A дробится R. Рассмотрим $A \cup \{x\}$. Пусть $U \subseteq A$. Тогда $U \cup \{x\}$ можно отдробить с помощью $r \cup \{x\}$, где $r \in R_2$, где r — то самое, которое отдрабливает U. Значит $A \cup \{x\}$ дробится R и размерность пространства $\geq d+1$ — противоречие.

Следствие. Пусть $VC(S, R) = d$, $A \subseteq S$: $|A| = n$. Тогда $|\mathrm{Pr}_A R| \leq g(n, d)$.

Доказательство. Применяем лемму к пространству $(A, \mathrm{Pr}_A R)$.

Определение. Пусть $h \geq 2$. *Измельчением* назовем $R_h = \{r_1 \cap \ldots \cap r_h : r_i \in R\}$.

Лемма 2. Пусть $VC(S, R) = d$, $h \geq 2$. Тогда $VC(S, R_h) \leq 2dh \log_2(dh)$.

Доказательство. Пусть $A \subseteq S$, $|A| = n$. Тогда по следствию $|\mathrm{Pr}_A R| \leq g(n, d) \leq n^d$. Значит $|\mathrm{Pr}_A R_h| \leq n^{dh}$. Если $n^{dh} < 2^n$, то A точно не дробится. При достаточно больших n это неравенство станет верным. В качестве первого n можно брать значение в формулировке леммы.

Пункты 28-29

Эпсилон-сети. Теорема Вапника-Червоненкиса об эпсилон-сетях (первая лемма — только формулировка, вторая лемма с доказательством, завершение доказательства) и теорема о треугольниках как частный случай.

Эпсилон-сети. Теорема Вапника-Червоненкиса об эпсилон-сетях (первая лемма с доказательством, вторая лемма — только формулировка, завершение доказательства) и теорема о треугольниках как частный случай.

Определение. Пусть $VC(S, R) = d < \infty$, $A \subseteq S$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Назовем $N \subseteq A$ *ε-сетью*, если N пересекается с любым $r \cap A$: $|r \cap A| \geq \varepsilon |A|$.

Теорема. Пусть $VC(X, R) = d < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\forall A \subset X$, $|A| < \infty$ $\exists \varepsilon$-сеть N: $|N| \leq \left\lceil \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \right\rceil$.

Доказательство. Фиксируем $A \subset X$, $n \coloneqq |A|$, $m \coloneqq \left\lceil \frac{8d}{\varepsilon} \log_2 \frac{8d}{\varepsilon} \right\rceil$. Построим N случайно, выбирая $x_1, \ldots, x_m$ с возвращением. Пусть

$$E_1 = \{\exists r \in R : |r \cap A| \geq \varepsilon n, \text{но } r \cap N = \emptyset\}.$$

Докажем, что $P(E_1) < 1$. Аналогично N выберем $T = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Пусть

$$E_2 = \left\{\exists r \in R: |r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset, |r \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right\}.$$

Лемма 1. $P(E_2|E_1) \geq \frac{5}{6}$.

Доказательство. Имеем $P(y_i \in r \cap A) \geq \varepsilon$, $|r \cap T| \sim Binom(m, \geq \varepsilon)$. Пусть $\eta \sim Binom(m, \varepsilon)$. Тогда $E\eta = m\varepsilon$, $D\eta = m\varepsilon(1-\varepsilon)$, $\varepsilon m \geq 8d \log_2 8 \geq 24$

$$P\left(|r \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right) \geq P\left(\eta \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right) = 1 - P\left(\eta < \frac{\varepsilon m}{2}\right) = 1 - P\left(\eta - E\eta < -\frac{\varepsilon m}{2}\right) \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D\eta}{\left(\frac{\varepsilon m}{2}\right)^2} = 1 - \frac{m\varepsilon(1-\varepsilon)}{\left(\frac{\varepsilon m}{2}\right)^2} > 1 - \frac{m\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon m}{2}\right)^2} = 1 - \frac{4}{\varepsilon m} \geq 1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6}.$$

Лемма 2. $P(E_2) \leq g(2m, d) \cdot 2^{-\frac{\varepsilon m}{2}}$, где $g(2m, d) = \sum_{k=0}^{d} C_{2m}^{k}$.

Доказательство. Можно сперва выбрать $U = \{z_1, \dots, z_{2m}\}$, а потом выбрать $N \subset U$, $|N| = m$ (U — размещение с повторениями).

$$P(E_2) = \sum_U P(E_2|U)P(U),$$

поэтому достаточно доказать, что $P(E_2|U) \leq g(2m, d)2^{-\frac{\varepsilon m}{2}}$. Пусть

$$E_{2,r} = \left\{|r \cap A| \geq \varepsilon n, r \cap N = \emptyset, |r \cap T| \geq \frac{\varepsilon m}{2}\right\}.$$

Тогда $E_2 = \bigcup_{r \in R} E_{2,r}$ и $P(E_2|U) = P\left(\bigcup_{r \in R} E_{2,r} \middle| U\right)$. Поскольку из $r_1 \cap U = r_2 \cap U$ следует, что $E_{2,r_1} = E_{2,r_2}$, то

$$P(E_2|U) = P\left(\bigcup_{r \in R} E_{2,r} \middle| U\right) \leq |\mathrm{Pr}_U R| \max_{r \in R} P(E_{2,r}|U) \leq g(2m, d) \max_{r \in R} P(E_{2,r}|U).$$

Осталось доказать, что $\forall r\ P(E_{2,r}|U) \leq 2^{-p}$, $p := \frac{\varepsilon m}{2}$. Если $|r \cap U| < p$, то $P(E_{2,r}|U) = 0$. Значит можно считать, что $|r \cap U| \geq p$.

$$P(E_{2,r}|U) \leq P(r \cap N = \emptyset|U) \leq \frac{C_{2m-p}^{m}}{C_{2m}^{m}} = \frac{(2m-p)!\, m!}{(2m)!\, (m-p)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{2m(2m-1)\dots(2m-p+1)} < 2^{-p}.$$

Пункт 30

Теорема Вапника-Червоненкиса. Теорема Вапника-Червоненкиса (б/д). Приложения в статистике: равномерная сходимость в ЗБЧ (УЗБЧ) (б/д).

Теорема (ЗБЧ). Если ξ_i одинаково распределены, то $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \to E\xi_1$.

Теорема (УЗБЧ). Пусть события $A_1, \dots, A_n, \dots$ такие, что $\forall i\ P(A_i) = p$, A_i независимы в совокупности. Тогда $\frac{I_{A_1} + \dots + I_{A_n}}{n} \to p$ почти наверное при $n \to \infty$.

Определение. *Равномерная сходимость* в УЗБЧ, если даны последовательности событий $\{A_i^x\}$ (с множеством верхних индексов X) означает, что

$$P\left(\sup_{x \in X} \left|\frac{I_{A_1^x} + \cdots I_{A_n^x}}{n} - p^x\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\right) = 1.$$

Пункт 37

Симметричный случай ЛЛЛ (б/д). Вывод оценки диагонального числа Рамсея (теорема Спенсера).

Определение. *A независимо от совокупности $B_1, \dots, B_n$*, если

$$\forall J \;\; P\left(A \middle| \cap_{j \in J} B_j\right) = P(A).$$

Теорема (симметричная локальная лемма Ловаса). Пусть для $A_1, \dots, A_n$ $P(A_i) \le p$ $\forall i$. Также пусть $\forall i$ A_i не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме $\le d$ штук. Тогда если $ep(d+1) \le 1$, то $P(\cup_{i=1}^n A_i) < 1$ ($\Leftrightarrow P(\cap_{i=1}^n \overline{A_i}) > 0$).

Иллюстрация. Выясним при каких n верно $R(s,s) > n$. Рассмотрим случайный граф $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ и события $A_1, \dots, A_{C_s^2}$, где A_i — i-е s-элементное множество клика или антиклика. $P(A_i) = 2^{1-C_s^2} =: p$. Имеем, что A_i зависит от всех A_j, для которых соответствующее множество из s вершин пересекается с данным множеством хотя бы по двум элементам. Получим, что

$$d = \sum_{k=2}^{s-1} C_s^k C_{n-s}^{s-k} < C_s^2 \cdot C_n^{s-2}.$$

Тогда $ep(d+1) = e2^{1-C_s^2}(C_s^2 C_n^{s-2} + 1) \le 1$, следовательно по ЛЛЛ $n = \left(1 + o(1)\right)\frac{\sqrt{2}}{e} s2^{s/2}$ сойдет:

$$e2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}}\left(\frac{s^2}{2} \cdot \left(1 + o(1)\right) \cdot \frac{s^2}{n^2} \cdot \frac{n^s}{s!}\right) =$$

$$= e2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}}\left(1+o(1)\right)\frac{s^4}{2} \cdot \left(1+o(1)\right)^{s-2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{s-2} e^{2-s} s^{s-2} 2^{\frac{s^2}{2}-s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s \left(1 + o(1)\right)} =$$

$$= \frac{e^3 s^2 \left(1+o(1)\right)^{s-2}}{2\sqrt{2\pi s}}.$$

Если вместо $o(1)$ подставить, например, функцию $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{s-2} \sim e^{-\frac{s-2}{\sqrt{s}}(1+o(1))}$, то последнее стремится к нулю.

Пункт 38

Симметричный и несимметричный случай ЛЛЛ (с доказательством симметричного либо напрямую, либо с доказательством несимметричного и выводом из него).

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — события. $G = (\{A_1, \dots, A_n\}, E)$ называется *орграфом зависимостей*, если $\forall i$ A_i не зависит от совокупности всех событий A_j: $\left(A_i, A_j\right) \notin E$.

Теорема (несимметричная ЛЛЛ). Рассмотрим события $A_1, \dots, A_n$. Пусть $G = (V, E)$ — орграф зависимостей такой, что $\exists x_1, \dots, x_n \in [0,1)$: $\forall i$ $P(A_i) \le x_i \cdot \prod_{j:(A_i,A_j)\in E}\left(1 - x_j\right)$. Тогда

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \ge \prod_{j=1}^n \left(1 - x_j\right) > 0.$$

Доказательство. Имеем

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}|\overline{A_3}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}|\overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_{n-1}}) =$$

$$= \left(1 - P(\overline{A_1})\right) \cdot \left(1 - P(\overline{A_2}|\overline{A_3})\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - P(\overline{A_n}|\overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_{n-1}})\right).$$

Доказательство будет следовать из следующей более сильной леммы:

Лемма. $\forall i\ \forall J \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\ P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J} \overline{A}_j\right) \leq x_i$.

Доказательство. Фиксируем i. Индукция по $|J|$.

База. $|J| = 0$, $P(A_i | \dots) = P(A_i) \leq x_i$.

Фиксируем $J \neq \emptyset$. Тогда $J = J_1 \sqcup J_2$, где $J_1 = \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}$, $J_2 = \{j \in J : (A_i, A_j) \notin E\}$. Если $J_1 = \emptyset$, то $P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J} \overline{A}_j\right) = P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right) = P(A_i) \leq x_i$. Пусть теперь $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$. Тогда

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J} \overline{A}_j\right) = \frac{P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in J_1} \overline{A}_j\right) \middle| \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \overline{A}_j \,\middle|\, \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)} \leq \frac{P(A_i)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \overline{A}_j \,\middle|\, \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)} \leq$$

$$\leq \frac{x_i \prod_{j:(A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)}{P\left(\bigcap_{j \in J_1} \overline{A}_j \,\middle|\, \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)} \leq x_i.$$

Докажем последнее неравенство:

$$P\left(\bigcap_{j \in J_1} \overline{A}_j \,\middle|\, \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right) =$$

$$= P\left(\overline{A_{j_1}} \middle| \bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right) \cdot P\left(\overline{A_{j_2}} \middle| \overline{A_{j_1}} \cap \left(\bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)\right) \cdot \dots \cdot P\left(\overline{A_{j_r}} \middle| \overline{A_{j_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{j_{r-1}}} \cap \left(\bigcap_{j \in J_2} \overline{A}_j\right)\right) =$$

$$= \left(1 - P\left(A_{j_1} | \dots\right)\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - P\left(A_{j_r} | \dots\right)\right) \geq \prod_{j \in J_1} (1 - x_j) \geq \prod_{j:(A_i, A_j) \in E} (1 - x_j).$$

Лемма доказана.

Иллюстрация. Докажем справедливость симметричной ЛЛЛ, опираясь на несимметричной.

Если $d = 0$, то $ep \leq 1$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(\overline{A}_i)\right) \geq (1 - p)^n \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right)^n > 0.$$

Пусть теперь $d \geq 1$, $G = (V, E)$ — соответствующий орграф зависимостей. Выберем $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{d+1}$. Тогда достаточно проверить, что

$$p \leq \frac{1}{d+1}\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d,$$

которое верно, поскольку $p \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{d+1}$.

Пункт 39

Пример применения несимметричного случая ЛЛЛ для нижней оценки $R(3, t)$ (вычислить оптимальные параметры не требуется). Самые точные известные оценки для $R(3, t)$ (б/д).

Теорема. $R(3, t) \leq \left(1 + o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}$.

Теорема. $R(3, t) \geq \left(\frac{1}{4} + o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}$.

Оценим $R(3, t)$. Имеем

$$R(3, t) \geq n \Leftrightarrow \exists G = (V, E), |V| = n : \omega(G) < 3, \alpha(G) < t.$$

Пусть $G = G(n,p)$, $p = p(n)$. Введем в рассмотрение события $A_1, \dots, A_{C_n^3}$ и $B_1, \dots, B_{C_n^t}$ (A_i — множество графов, в которых есть конкретный треугольник). Нужно, чтобы $P\left(\bigcap_{i=1}^{C_n^3} \bar{A}_i \cap \left(\bigcap_{j=1}^{C_n^t} B_j\right)\right)$.

Имеем $P(A_i) = p^3$, $P\left(B_j\right) = p^{C_t^2}$. Пусть $\#(A_i, A)$ — количество зависимостей события A_i от событий типа A. Аналогично определим $\#(A_i, B)$, $\#\left(B_j, A\right)$, $\#\left(B_j, B\right)$. Выберем равные $x_i = x$ для всех A_i и равные $x_j = y$ для всех B_j:

$$p^3 \le x(1-x)^{\#(A_i,A)}(1-y)^{\#(A_i,B)}$$

$$(1-p)^{C_t^2} \le y(1-x)^{\#(B_j,A)}(1-y)^{\#(B_j,B)}.$$

Пусть для данного t число n таково, что $\exists p \in [0,1]$, $\exists x \in [0,1)$, $\exists y \in [0,1)$, с которыми выполнены эти неравенства. Тогда $R(3,t) > n$.

Следствие (б/д). $R(3,t) \ge \frac{ct^2}{\ln^2 t}$.

Пункт 40

Хроматическое число гиперграфа. Пример применения ЛЛЛ для верхней оценки хроматического числа n-однородного гиперграфа. Сравнение с тривиальной оценкой в случае обычного графа.

Определение. *Хроматическое число гиперграфа* — это минимальное число цветов, в которые можно покрасить вершины так, чтобы каждое ребро не было одноцветным.

Задача. Оценим $\chi(H)$, где Δ — максимальная степень вершины n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$.

Доказательство. Покрасим V в r цветов случайно. Рассмотрим $A \in E$, $|A| = n$, $\mathcal{A}$ — событие, что A одноцветно. Тогда $P(\mathcal{A}) = r\left(\frac{1}{r}\right)^n = r^{1-n}$. Пусть $A_1, \dots, A_{|E|}$ — ребра, а $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{|E|}$ — соответствующие им события. Число событий, от которых зависит $\mathcal{A}_i$: $d \le$ количества A_j: $A_j \cap A_i \ne \emptyset \le n(\Delta - 1)$. Если верно $e \cdot r^{1-n} \cdot (n(\Delta-1)+1) \le 1$, то по ЛЛЛ $P\left(\bigcap_{i=1}^{|E|} A_i\right) > 0$ и $\chi(G) < r$. Оптимальное значение $r = \left\lceil \sqrt[n-1]{e(n(\Delta-1)+1)} \right\rceil$.

Тривиальная оценка в случае обычного графа: $\chi(G) \le \Delta + 1$.

Пункт 42

Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания.

Теорема (неравенство Маркова). $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$, $X: \Omega \to \mathbb{R}_+$.

Теорема (неравенство Чебышёва). $P(|X - EX| > a) \leq \frac{DX}{a^2}$.

Утверждение. Если $\{\xi_n\}$ последовательность случайных величин, каждая из которых с вероятностью $1/2$ равна 1 и с вероятностью $1/2$ равна -1, и $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то

$$P(\eta_n > a) \leq \frac{n}{a^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$P(\eta_n > a) = P(\eta_n - E\eta_n > a) \leq \frac{D\eta_n}{a^2} = \frac{n}{a^2}.$$

Теорема. В условиях предыдущего утверждения

$$P(\eta_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Доказательство. $\forall \lambda > 0$

$$P(\eta_n > a) = P\left(e^{\lambda \eta_n} > e^{\lambda a}\right) \leq e^{-\lambda a} E e^{\lambda \eta_n} = e^{-\lambda a} \prod_{k=1}^{n} E e^{\lambda \xi_k} = e^{-\lambda a} \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n =$$

$$= e^{-\lambda a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)^n \leq e^{-\lambda a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2^k k!}\right)^n = e^{-\lambda a + \frac{\lambda^2}{2} n}.$$

Для $\lambda = \frac{a}{n}$ получаем

$$P(\eta_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Пункты 43-44

Связность случайного графа: случай $p = c \ln n / n$ при $c < 1$. Теоремы о $\frac{\ln n + \gamma}{n}$ и о гигантской компоненте (б/д).

Связность случайного графа: случай $p = c \ln n / n$ при $c > 1$.

Теорема. Пусть $p = p(n) = \frac{c \ln n}{n}$, $c > 0$. Тогда если

1. $c > 1$, то а.п.н. $G(n,p)$ связен;
2. $c < 1$, то а.п.н. $G(n,p)$ не связен.

Доказательство. Пусть $c > 1$. Тогда

$$P(G(n,p) \text{ не связен}) = P(\exists k \in \{1, \dots, n-1\} \ \exists \text{связная компонента на } k \text{ вершинах}) =$$

$$= P\left(\bigcup_{k} \bigcup_{i=1}^{C_n^k} \{G: i - \text{е } k - \text{элементное множество образует связную компоненту}\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{C_n^k} P(i - \text{е } k - \text{элементное множество образует связную компоненту}) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{C_n^k} P\begin{pmatrix}\text{из } i-\text{го } k-\text{элементного множества вершин}\\ \text{ни одно ребро не идет наружу}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} = 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n}{\sqrt{\ln n}}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} + \sum_{k>\frac{n}{\sqrt{\ln n}}}^{\frac{n}{2}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} = S_1 + S_2.$$

Пусть $a_k(n) = C_n^k (1-p)^{k(n-k)}$. При $k > n/\sqrt{\ln n}$ имеем

$$a_k(n) = C_n^k (1-p)^{k(n-k)} < 2^n (1-p)^{k(n-k)} \leq 2^n e^{-pk(n-k)} < 2^n e^{-p\cdot\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\cdot\frac{n}{2}} =$$

$$= 2^n e^{-\frac{c\ln n}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\cdot\frac{n}{2}} = 2^n e^{-\frac{cn\sqrt{\ln n}}{2}}$$

откуда $S_2 < n\cdot 2^n e^{-\frac{cn\sqrt{\ln n}}{2}} \to 0$.

Поскольку

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{n-2k-1} < n(1-p)^{n-2k-1} \leq n(1-p)^{n-\frac{2n}{\sqrt{\ln n}}-1} = n(1-p)^{n(1+o(1))} = q \to 0$$

то

$$S_1 \leq a_1(n)\cdot\frac{1}{1-q} \to 0.$$

Пусть теперь $c < 1$. Докажем, что количество X_1 изолированных вершин в G не меньше 1 (понятно, что $EX_1 = n(1-p)^{n-1}$):

$$P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 \leq 0) = 1 - P(-X_1 \geq 0) = 1 - P(EX_1 - X_1 \geq EX_1) \geq$$

$$\geq 1 - P(|EX_1 - X_1| \geq EX_1) \geq 1 - \frac{DX_1}{(EX_1)^2}.$$

Имеем

$$\frac{DX_1}{(EX_1)^2} = \frac{EX_1 + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - (EX_1)^2}{(EX_1)^2} = o(1) + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \to 0,$$

откуда $P(X_1 \geq 1) \to 1$.

Теорема. Пусть $p = p(n) = \frac{\ln n + \gamma}{n}$. Тогда $P(G(n,p)\text{ связен}) \to e^{-e^{-\gamma}}$.

Теорема. Пусть $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$. Тогда если

1. $c < 1$, то $\exists \beta = \beta(c)$: а.п.н число вершин в каждой связной компоненте $\leq \beta \ln n$;
2. $c > 1$, то $\exists \gamma \in (0,1)$, $\exists \beta > 0$: а.п.н ровно одна компонента имеет $\geq \gamma n$ вершин (“гигантская”), а каждая из оставшихся компонент имеет $\leq \beta \ln n$ вершин.

Пункт 45

Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Оценки хроматического числа графа при $p = o(1/n^2)$ и $p = o(1/n)$.

Теорема (Боллобаша). При $p = \frac{1}{2}$ а.п.н. $\chi(G) \sim \frac{n}{2\log_2 n}$.

Если $p = p(n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то $(1-p)^{C_n^2} \geq 1 - pC_n^2 \geq 1 - \frac{pn^2}{2} \to 0$, т.е. в графе а.п.н. нет ребер и а.п.н. $\chi(G) = 1$.

Если $p = p(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то а.п.н. $\chi(G) \leq 2$. Действительно, пусть $X(G)$ — количество простых циклов в G. Тогда

$$EX = \sum_{r=3}^{n} C_n^r \cdot \frac{(r-1)!}{2} \cdot p^r < \sum_{r=3}^{n} (np)^r < \frac{(np)^3}{1-np} \to 0,$$

т.е. в G а.п.н. нет циклов.

Теорема (Боллобаша). Пусть $\alpha > \frac{5}{6}$ и $p = n^{-\alpha}$. Тогда $\exists u = u(n, \alpha)$: а.п.н. $\chi(G) \in \{u, u+1, u+2, u+3\}$.

Пункты 46-47

Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Вторая теорема Боллобаша (б/д): техническая лемма с доказательством.

Оценка отклонения для липшицевой по вершинам случайной величины (б/д). Вторая теорема Боллобаша: техническая лемма (б/д), вывод теоремы из технической леммы.

Определение. Функция $f = f(G)$ называется *липшицевой по вершинам*, если $|f(G) - f(G')| \leq 1$ для любых G, G' отличающихся на одну вершину (с примыкающимися к этой вершине ребрами).

Теорема. Пусть f — липшиц по вершинам. Тогда

$$P(|f - Ef| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}}.$$

Лемма. Если $|V| = n$, то $\exists n_1 : \forall n \geq n_1$

$$P\left(\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n}\ln n : \chi(G|_S) \leq 3\right) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Доказательство.

$$P\left(\exists S \subset V, |S| \leq \sqrt{n}\ln n : \chi(G|_S) \geq 4\right) =$$

$$= P\left(\exists t \in [4, \sqrt{n}\ln n], \exists T \subset V : |T| = t, \chi(G|_T) \geq 4, \text{но } \forall x \in T\ \chi\left(G|_{T\setminus\{x\}}\right) \leq 3\right) \leq$$

$$\leq P\left(\exists t \in [4, \sqrt{n}\ln n], \exists T : |T| = t, E(G|_T) \geq \frac{3t}{2}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \sum_{T:|T|=t} P\left(E(G|_T) \geq \frac{3t}{2}\right) \leq \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \sum_{T:|T|=t} C_{C_t^2}^{\frac{3t}{2}} \cdot p^{\frac{3t}{2}} = \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} C_n^t \cdot C_{C_t^2}^{\frac{3t}{2}} \cdot p^{\frac{3t}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(\frac{en}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{eC_t^2}{3t/2}\right)^{\frac{3t}{2}} \cdot p^{\frac{3t}{2}} = \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(\frac{en}{t} \cdot \left(\frac{eC_t^2}{3t/2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{3}{2}}\right)^t <$$

$$< \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(\frac{en}{t} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot p^{\frac{3}{2}}\right)^t = \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(en \cdot \sqrt{t} \cdot p^{\frac{3}{2}}\right)^t \leq$$

$$\leq \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(en \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt{\ln n} \cdot n^{-\frac{3}{2}\alpha}\right)^t = \sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(n^{\beta} \cdot e\sqrt{\ln n}\right)^t,$$

которое для достаточно больших n не больше

$$\sum_{t=4}^{\sqrt{n}\ln n} \left(n^{\frac{\beta}{2}}\right)^t < \frac{n^{2\beta}}{1 - n^{\frac{\beta}{2}}} < \frac{1}{\ln n}.$$

Теорема (Боллобаша). Пусть $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(\frac{5}{6}, 1\right)$. Тогда

$$\exists u = u(n, \alpha): P(u \leq \chi(G) \leq u + 3) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Доказательство. Пусть u минимальное среди всех u, удовлетворяющих

$$P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}.$$

Тогда

$$P(\chi(G) \leq u - 1) \leq \frac{1}{\ln n}, \qquad P(\chi(G) \geq u) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Пусть также

$$Y = Y(G) = \min\left\{|S|: S \subset V, \chi\left(G|_{V\setminus S}\right) \leq u\right\}.$$

Тогда Y — липшиц величина и если $a = \sqrt{2(n-1)\ln\ln n}$, то

$$\frac{1}{\ln n} = e^{-\frac{a^2}{2(n-1)}} \geq P(Y - EY \leq -a).$$

Предположим, что $EY \geq a$. Тогда последняя вероятность равна

$$P(Y \leq EY - a) \geq P(Y \leq 0) = P(Y = 0) = P(\chi(G) \leq u) > \frac{1}{\ln n}$$

— противоречие[1]. Значит $EY < a$ и

$$P\left(Y \geq 2\sqrt{2(n-1)\ln\ln n}\right) = P(Y \geq 2a) \leq P(Y \geq a + EY) = P(Y - EY \geq a) \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Отсюда

$$P\left(Y < \sqrt{n}\ln n\right) \geq P\left(Y < 2\sqrt{2(n-1)\ln\ln n}\right) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Пусть

$$A_1 = \left\{\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n}\ln n : \chi(G|_S) \leq 3\right\};$$

$$A_2 = \{\chi(G) \geq u\};$$

$$A_3 = \left\{Y < \sqrt{n}\ln n\right\}.$$

Имеем $P(A_1) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$, $P(A_2) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$, $P(A_3) \geq 1 - \frac{1}{\ln n}$, следовательно

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 1 - \frac{3}{\ln n} \to 1.$$

[1] Чужь собачий (Райгородский А.М.)

Пункты 48-49

Оценка отклонения для липшицевой по ребрам случайной величины (б/д). Первая теорема Боллобаша (б/д): доказательство неравенства $EY_{k_1} \geq \frac{m^2}{2k_1^4}(1+o(1))$. Можно использовать без доказательства $f_{k_1}(m) = m^{3+o(1)}$ и асимптотику для $\sum C_m^{k_1} C_{k_1}^t C_{m-k_1}^{k_1-t} \left(\frac{1}{2}\right)^{2C_{k_1}^2 - C_t^2}$.

Оценка отклонения для липшицевой по ребрам случайной величины (б/д). Первая теорема Боллобаша с доказательством, неравенство $EY_{k_1} \geq \frac{m^2}{2k_1^4}(1+o(1))$ (б/д).

Определение. Функция $f = f(G)$ называется *липшицевой по ребрам*, если $|f(G) - f(G')| \leq 1$ для любых G, G' отличающихся на одно ребро.

Теорема. Пусть f — липшиц по ребрам. Тогда

$$P(|f - Ef| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2C_n^2}}.$$

Теорема (первая теорема Боллобаша).

$$\exists \varphi : \varphi(n) = o\left(\frac{n}{\log n}\right) : \text{а. п. н.} \left|\chi\left(G\left(n, \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| \leq \varphi(n).$$

Доказательство. Рассмотрим $f_k(m) := C_m^k 2^{-C_k^2}$ — матожидание числа k-вершинных независимых множеств в $G\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим $k_0 = k_0(m) = \min\{k : f_k(m) < 1\}$.

Утверждение. $k_0 \sim 2\log_2 m$.

Рассмотрим $k_1 = k_0 - 3$.

Пафос: $k_1 \sim 2\log_2 m \sim 2\log_2 n$.

Утверждение. $f_{k_1}(m) = m^{3+o(1)}$.

Пусть $m = \left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]$.

Лемма. $P(\forall S \subset V, |S| = m : \alpha(G|_S) \geq k_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Доказательство.

$$P(\exists S \subset V, |S| = m : \alpha(G|_S) < k_1) \leq \sum_{\substack{S \subset V \\ |S|=m}} P(\alpha(G|_S) < k_1) = C_n^m \cdot P\left(\alpha\left(G\left(m, \frac{1}{2}\right)\right) < k_1\right).$$

$\alpha(G) < k_1$ означает, что $EX_{k_1} = 0$, где X_{k_1} — количество независимых множеств размера k_1. Имеем

$$EX_{k_1} = C_m^{k_1} 2^{-C_{k_1}^2} = f_{k_1}(m) = m^{3+o(1)}.$$

Определим

$$Y_{k_1}(G) = \max\{m : \exists A_1, \dots, A_m \subset V : \forall i\ |A_i| = k_1, G|_{A_i} \text{ независимое}, \forall i, j\ |A_i \cap A_j| \leq 1\}.$$

$\alpha(G) < k_1$ также означает, что $Y_{k_1}(G) = 0$. Продолжая оценки

$$C_n^m \cdot P_m(\alpha(G) < k_1) < 2^n P_m(EY_{k_1} - Y_{k_1} \geq EY_{k_1}) \leq 2^n \cdot e^{-\frac{(EY_{k_1})^2}{2C_m^2}}.$$

Лемма. $EY_{k_1} \geq \frac{m^2}{2k_1^4}(1+o(1))$.

Доказательство. Рассмотрим граф G на m вершинах. Пусть $X_{k_1}(G) = a$ и $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_a\}$ — все независимые множества G, имеющие мощность k_1. Пусть также

$$W(G) = \big\{\{A, B\}: A, B \in \mathcal{K}(G), |A \cap B| \geq 2, A \neq B\big\}.$$

Пусть $q^* \in [0, 1]$. Из $\mathcal{K}(G)$ получим $C(G) \subseteq \mathcal{K}(G)$, кладя каждое независимое множество K_i в $C(G)$ с вероятностью q^*. Определим также

$$W^*(G, q^*) = \big\{\{A, B\}: A, B \in C(G), |A \cap B| \geq 2, A \neq B\big\}$$

и

$$\mu \coloneqq f_k(m) = m^{3+o(1)} = EX_{k_1} = E|\mathcal{K}|.$$

Тогда $E|C| = \mu q^*$. Обозначим $E|W| =: \frac{\Delta}{2}$. Тогда $E|W^*| = \frac{\Delta (q^*)^2}{2}$.

Из $C(G)$ получим $C^*(G)$, удалив из $C(G)$ по одному множеству из каждой пары в W^*.

Имеем $Y_{k_1}(G) \geq |C^*(G)|$, поэтому

$$EY_{k_1} \geq E|C^*| \geq E|C| - E|W^*| = \mu q^* - \frac{\Delta (q^*)^2}{2}.$$

Подставив $q^*_{\max} = \frac{\mu}{\Delta}$ получаем

$$EY_{k_1} \geq \frac{\mu^2}{2\Delta}.$$

Имеем, что $\frac{\mu^2}{2\Delta} \sim \frac{m^2}{2k_1^4}$, поскольку

$$\frac{\Delta}{2} = E|W| = \sum_{t=2}^{k_1 - 1} C_m^{k_1} C_{k_1}^t C_{m-k_1}^{k_1 - t} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2C_{k_1}^2 - C_t^2}.$$

Также $\frac{\mu^2}{\Delta} \in [0, 1]$, поскольку

$$\frac{\mu}{\Delta} \sim \frac{\mu \cdot m^2}{\mu^2 \cdot k_1^4} = \frac{m^2}{\mu \cdot k_1^4} = \frac{m^{2+o(1)}}{\mu} = \frac{m^{2+o(1)}}{m^{3+o(1)}} \in [0, 1].$$

…

$$\frac{\left(EY_{k_1}\right)^2}{2C_m^2} \sim \frac{m^4}{4k_1^8} \cdot \frac{1}{2 \cdot m^2/2} \sim \frac{m^2}{4k_1^8} \sim \frac{Cn^2}{\ln^{12} n} = n^{2+o(1)}$$

и

$$2^n \cdot e^{-\frac{\left(EY_{k_1}\right)^2}{2C_m^2}} = 2^n \cdot e^{-n^{2+o(1)}} \to 0.$$

…

Рассмотрим любой G: $\forall S \subset V$, $|S| = m$: $\alpha(G|_S) \geq k_1$. Раскрасим все независимые множества пока можем в разные цвета каждое и когда останется $\leq m$ вершин раскрасим эти вершины в разные цвета. В итоге мы раскрасим граф $\left[\frac{n-m}{k_1}\right] + m$ цветами, которое асимптотически $\frac{n}{2 \log_2 n}$.

Пункт 50

Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости).

Теорема. Рассмотрим $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Тогда а.п.н. $\omega(G) < 2\log_2 n$, $\alpha(G) < 2\log_2 n$.

Доказательство. Пусть $k = \log_2 n$, $X_k(G)$ — число k-клик в графе G. По неравенству Маркова

$$P(X_k \geq 1) \leq EX_k = C_n^k 2^{-C_k^2} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{2^{k\log_2 n}}{k!} 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} \to 0.$$

Пункт 51

Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм раскраски случайного графа ошибается не более, чем в 2 раза. Теорема Кучеры (б/д).

Теорема. Пусть $\chi_g(G)$ — число цветов, использованных жадным алгоритмом, а $\alpha_g(G)$ — размер самого большого цвета.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P\left(\frac{\alpha(G)}{\alpha_g(G)} \leq 2 + \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad G \sim G\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Имеем, что а.п.н. $\alpha(G) \leq 2\log_2 n$, следовательно достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \alpha_g(G) \geq (1-\varepsilon)\log_2 n.$$

Обозначим

$$m = \left[\frac{n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}\right].$$

Пусть событие $A = \left\{\alpha_g(G) < (1-\varepsilon)\log_2 n\right\}$. Из A следует, что

$$\exists a_1, \dots, a_m \colon a_i < (1-\varepsilon)\log_2 n\,, i = 1, \dots, m$$

$$\exists C_1, \dots, C_m \colon \forall i \; |C_i| = a_i, \forall i, j \; C_i \cap C_j = \emptyset,$$

$$\forall x \in V \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_m) \; \forall i \; \exists y \in C_i \colon (x, y) \in E.$$

Фиксируем x, i:

$$P(\exists y \in C_i \colon (x,y) \in E) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}.$$

Фиксируем x:

$$P(\forall i \; \exists y \in C_i \colon (x,y) \in E) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right).$$

Значит

$$P(\forall x \in V \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n) \; \forall i \; \exists y \in C_i \colon (x,y) \in E) = \left(\prod_{i=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n - a_1 - \dots - a_m}.$$

В силу того, что $a_1 + \dots + a_m \geq \frac{n}{2}$ получаем

$$\left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{n-a_1-\cdots-a_m} \le \left(\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a_i}\right)\right)^{\frac{n}{2}} < \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(1-\varepsilon)\log_2 n}\right)^{\frac{nm}{2}} = \left(1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{nm}{2}} \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\cdot\frac{nm}{2}} = e^{-\frac{mn^{\varepsilon}}{2}}.$$

При достаточно больших n верно, что $m \ge \frac{n}{\log_2 n}$, поэтому

$$e^{-\frac{mn^{\varepsilon}}{2}} \le e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}}.$$

Далее,

$$P(A) \le \sum_{a_1=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \dots \sum_{m=1}^{(1-\varepsilon)\log_2 n} \sum_{\substack{C_1,\dots,C_m \\ \forall i\ |C_i|=a_i \\ \forall i,j\ C_i\cap C_j=\emptyset}} e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} =$$

$$= \sum_{a_1}\dots\sum_{a_m} C_m^{a_1} C_{m-a_1}^{a_2} \dots C_{m-a_1-\cdots-a_{m-1}}^{a_m} e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} <$$

$$< e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} \sum_{a_1,\dots,a_m} n^{a_1+\cdots+a_m} = e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} n^{\frac{n}{2}} \sum_{a_1,\dots,a_m} 1 < n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n}} \cdot (\log_2 n)^m =$$

$$= e^{\frac{n}{2}\ln n - \frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n} + m\ln(\log_2 n)}.$$

При достаточно маленький ε имеем $m \le \frac{n}{\log_2 n}$, поэтому последнее выражение не больше

$$e^{\frac{n}{2}\ln n - \frac{n^{1+\varepsilon}}{4\log_2 n} + \frac{n}{\log_2 n}\ln(\log_2 n)} \to 0.$$

Теорема (Кучеры). $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists \{G_n\}$: $|V_n| = n$: $P_\sigma\left(\frac{\alpha(G_n)}{\alpha_g^\sigma(G_n)} \ge n^{1-\varepsilon}\right) \ge 1-\delta$, $\sigma: V_n \to V_n$.

Пункт 52

Теорема Эрдёша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом.

Определение. *Обхват* $g(G)$ графа G — длина самого короткого цикла в G.

Теорема. $\forall k, l\ \exists G$: $\chi(G) > k$, $g(G) > l$.

Доказательство. Выберем случайный граф $G(n,p)$, $p = p(n) = n^{\theta-1}$, $\theta = \frac{1}{2l}$. Пусть $X_l = X_l(G)$ — количество простых циклов длины $\le l$. По неравенству Маркова

$$P\left(X_l \ge \frac{n}{2}\right) \le \frac{EX_l}{n/2}.$$

Имеем

$$EX_l = E\sum_{r=3}^{l}\sum_{i=1}^{C_n^r\cdot\frac{(r-1)!}{2}} I(C_i \subset G) = \sum_{r=3}^{l}\sum_{i=1}^{C_n^r\cdot\frac{(r-1)!}{2}} P(C_i \subset G) = \sum_{r=3}^{l}\sum_{i=1}^{C_n^r\cdot\frac{(r-1)!}{2}} p^r = \sum_{r=3}^{l} C_n^r \cdot \frac{(r-1)!}{2} \cdot p^r \le$$

$$\le \sum_{r=3}^{l} (np)^r < l(np)^l = ln^{\theta l} = ln^{\frac{1}{2}}.$$

Значит

$$P\left(X_l \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2EX_l}{n} \leq \frac{2l}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

и начиная с некоторого n_1 верно $\forall n \geq n_1$

$$P\left(X_l > \frac{n}{2}\right) < \frac{1}{2}, \qquad P\left(X_l \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Теперь обозначим $x = \left\lceil \frac{3\ln n}{p} \right\rceil \leq \frac{6\ln n}{p}$, $Y_x = Y_x(G)$ — количество независимых множеств на x вершинах.

$$P(\alpha(G) < x) = P(Y_x = 0) = 1 - P(Y_x \geq 1) \geq 1 - EY_x.$$

$$EY_x = C_n^x (1-p)^{C_x^2} < n^x e^{-pC_x^2} = n^x e^{-p\frac{x^2}{2}(1+o(1))} = e^{x\left(\ln x - p\frac{x}{2}(1+o(1))\right)} \to 0.$$

Значит с некоторого n_2 верно $\forall n \geq n_2$

$$P(\alpha(G) < x) > \frac{1}{2}.$$

Значит для $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ $\exists G$: $X_l(G) \leq \frac{n}{2}$ и $\alpha(G) < x$.

Рассмотрим граф G', полученный из G удалением по одной вершины из каждого цикла длины $\leq l$. При этом будут удалены максимум $n/2$ вершин, поэтому $|V(G')| \geq \frac{n}{2}$. Также $g(G') > l$ и

$$\alpha(G') \leq \alpha(G) \Longrightarrow \chi(G') \geq \frac{n/2}{\alpha(G')} > \frac{n}{2x} \geq \frac{np}{12\ln n} = \frac{n^\theta}{12\ln n} > k$$

начиная с какого-то n_3 ($\forall n \geq n_3$).

Пункт 53

Кнезеровский граф. Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Кликовое число и число независимости кнезеровского графа.

Определение. *Кнезеровским* называется граф $KG_{n,r} = G(n,r,0) = \left(C_{\{1,\dots,n\}}^r, E\right)$ такой, что $(A,B) \in E \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

По теореме ЭКР

$$\alpha(KG_{n,r}) = \begin{cases} C_n^r, & 2r > n \\ C_{n-1}^{r-1}, & 2r \leq n \end{cases}.$$

$$\omega(KG_{n,r}) = \left[\frac{n}{r}\right]$$

$$\chi(KG_{n,r}) \geq \omega(KG_{n,r}) = \left[\frac{n}{r}\right]$$

При $2r \leq n$

$$\chi(KG_{n,r}) \geq \frac{|V|}{\alpha(KG_{n,r})} = \frac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} = \frac{n}{r}$$

Примеры:

1. $KG_{n,1} = K_n$, $\chi(K_n) = n$.
2. $KG_{n,\frac{n}{2}}$ — паросочетания, т.е. независимое множество ребер, двудольный граф. $\chi = 2$.

Пункт 54

Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (б/д).

Утверждение. $\chi(KG_{n,r}) < n$.

Доказательство. Покрасим в 1-й цвет все вершины, содержащие 1, во 2-й цвет — все вершины, содержащие 2, но не содержащие 1, и т.д. до n-го цвета.

Теорема. $\chi(KG_{n,r}) \le n - 2r + 2$.

Доказательство. Запустим алгоритм из доказательства предыдущего утверждения, только не до n, а до $n - 2r + 1$. Тогда останутся не раскрашенными только вершины, содержащие $n - 2r + 2, \dots, n$. Эти вершины не могут не пересекаться, поскольку их мощность r, поэтому их можно покрасить в один цвет.

Пункт 55

Верхняя оценка хроматического числа кнезеровского графа. Теорема Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана (б/д). Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа.

Теорема. Пусть $n-1$-мерная сфера с центром в нуле в n-мерном пространстве $S^{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_n$, $\forall i$ A_i либо открыто, либо замкнуто. Тогда $\exists i\ \exists \bar{x} \in A_i$: $-\bar{x} \in A_i$.

Теорема. $\chi(KG_{n,r}) \ge n - 2r + 2$.

Доказательство. Предположим, что $\chi(KG_{n,r}) \le n - 2r + 1 = d$. Обозначим эти цвета через $\chi_1, \dots, \chi_d$. Если $K_i \cap K_j = \emptyset$, то $\chi(K_i) \ne \chi(K_j)$.

Разместим наш граф на сферу $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ специальным образом. Назовем экватором сферы ее пересечение с любой гиперплоскостью, проходящей через центр. Разместим точки $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ на сферу таким образом, чтобы на каждом экваторе лежали $\le d$ точек. Пусть $L_1, \dots, L_{C_n^r}$ все их r-элементные подмножества.

Для каждой точки $\bar{x} \in S^d$ обозначим $\mathcal{H}(\bar{x})$ верхнюю открытую полусферу с эпицентром в $\bar{x}$. Для $i = 1, \dots, n$ определим

$$A_i = \{\bar{x} \in S^d \colon \text{в } \mathcal{H}(\bar{x}) \text{ есть хотя бы одна вершина } L_j, \text{покрашенная в цвет } \chi_i\},$$

$$A_{d+1} = \{\bar{x} \in S^d \colon |\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\} \cap \mathcal{H}(\bar{x})| \le r - 1\}.$$

Таким образом, $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_d \cup A_{d+1}$, причем $A_1, \dots, A_n$ — открытые, а A_{d+1} — замкнуто. По теореме четырех авторов $\exists i\ \exists \bar{x} \in A_i$: $-\bar{x} \in A_i$. Если $i \in \{1, \dots, d\}$, то $\exists L_j \subset \mathcal{H}(\bar{x})$ и $\exists L_k \subset \mathcal{H}(-\bar{x})$: $\chi(L_j) = \chi(L_k)$. Но это невозможно, поскольку L_j и L_k не пересекаются. Значит $i = d + 1$. Тогда количество $\overline{x_\iota}$ в $\mathcal{H}(\bar{x})$ не больше $r - 1$ и количество $\overline{x_\iota}$ в $\mathcal{H}(-\bar{x})$ тоже не больше $r - 1$. Значит на оставшемся экваторе число точек $\overline{x_\iota}$ не меньше $n - 2(r - 1) = d + 1$, которое невозможно — противоречие.

Пункт 56

Теорема Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана: доказательство в случае замкнутых множеств для $n = 2$ и $n = 3$.

Доказательство. Пусть $n = 2$, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $S^1 = A_1 \cup A_2$, A_i — замкнуто. Рассмотрим точку $\bar{x} \in A_1$. Если $-\bar{x} \in A_1$, то нечего доказать. Начнем двигаться на дуге от $\bar{x}$ до $-\bar{x}$ по часовой стрелке до последней точки $\bar{y}$ множества A_1. Тогда $\bar{y} \in A_2$. Поскольку $-\bar{y}$ принадлежит либо к A_1, либо к A_2, то $\bar{y}$ — искомая точка.

Пусть теперь $n = 3$, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, A_i — замкнуто. Предположим противное, что нет диаметрально противоположных точек ни на каком множестве A_i. Тогда $\operatorname{diam} A_i < 2$ (сфера единичного радиуса). Разобьем сферу на параллели и каждую полосу между параллелями разобьем на (Т-образные) кирпичики. Определим G_1 как объединение всех кирпичиков и полюсов, каждый из которых имеет непустое пересечение с A_1. При некотором разбиении сферы на кирпичики верно $\operatorname{diam} G_1 < 2$. Можно также считать, что G_1 — замкнуто. Тогда граница $\partial G_1 = L_1 \sqcup \ldots \sqcup L_k$ является объединением непересекающихся ломаных. Отразим G_1 относительно центра сферы и получим G_1'. Тогда $G_1 \cap G_1' = \emptyset$. Кривые $L_1, \ldots, L_k, L_1', \ldots, L_k'$ (L_i и L_i' симметричны относительно центра) по теореме Жордана образуют $2k + 1$ связных частей. В силу нечетности последнего количества найдется центрально симметричный кусок N сферы между этими кривыми. Имеем $N \cap G_1 = \emptyset$, $N \cap G_1' = \emptyset$. В силу $A_1 \subseteq G_1$ имеем $N \cap A_1 = \emptyset$. Значит N целиком покрыто множествами A_2, A_3. Возьмем диаметрально противоположные точки из N, соединим их кривым, лежащей в N и отразим эту кривую относительно центра. Получится по сути окружность, покрытая двумя замкнутыми множествами, которая сводится к случаю $n = 2$.

Пункт 57

Максимальное число $m(n,k,t)$ подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых ровно k элементов и среди которых любые два множества пересекаются не по t элементам. Точное значение для $m(n,3,1)$: явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$.

Мы знаем, что $m(n,3,1) = \begin{cases} n, \ n \equiv 0(4) \\ n-1, \ n \equiv 1(4) \\ n-2, \ n \equiv 2,3(4) \end{cases}$.

Конструкция: берем $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, $\ldots$ — как можно больше 4-элементные непересекающиеся подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$.

Линейно-алгебраический метод дает оценку сверху $m(n,3,1) \le n$.

Пункт 58

Величина $m(n,k,t)$. Линейно-алгебраическая оценка для $m(n,3,1)$ (б/д). Аналогичная оценка для $m(n,5,2)$ и ее асимптотическая неулучшаемость.

Если фиксировать 3 элемента и выбрать множества, содержащие эту тройку, то получается оценка снизу: $m(n,5,2) \ge C_{n-3}^2 \sim n^2/2$. С другой стороны, верна следующая

Теорема. $m(n,5,2) \le C_n^2 + 2C_n^1 + C_n^0 \sim n^2/2$.

Доказательство. Зафиксируем ребра $A_1, \ldots, A_t$, $|A_i| = 5$, $|A_i \cap A_j| \ne 2$. Сопоставим каждому множеству A_i вектор $\overline{x_i}$ над $\mathbb{Z}_2^n$, соответствующие 5 координаты которого равны 1, а остальные — 0. Также строим многочлены $P_{\overline{x_1}}, \ldots, P_{\overline{x_t}} \in \mathbb{Z}_3[y_1, \ldots, y_n] = \mathbb{Z}_3[\bar{y}]$ следующим образом:

$$P_{\overline{x_i}}(\bar{y}) := (\overline{x_i}, \bar{y})\big((\overline{x_i}, \bar{y}) - 1\big).$$

Докажем, что $P_{\overline{x_1}}, \ldots, P_{\overline{x_t}}$ ЛНЗ над $\mathbb{Z}_3$. Рассмотрим ЛК этих многочленов, равная нулю:

$$c_1 P_{\overline{x_1}} + \cdots + c_t P_{\overline{x_t}} = 0.$$

Подставим $\bar{y} = \overline{x_1}$. Тогда получим $c_1 \cdot 5 \cdot 4 = 0$ или $c_1 = 0$. Значит эти многочлены ЛНЗ и t не превосходит размерности их пространства. Мономы 1, y_i, y_i^2, $y_i y_j$ порождают это пространство, следовательно $t \le C_n^0 + C_n^1 + C_n^1 + C_n^2$.

Пункт 59

Общая теорема Франкла-Уилсона для $m(n,k,k-p)$ при $k<2p$.

Теорема (Франкл-Уилсон, 1981). Пусть $r-s=p$ — простое число и $r-2p<0$. Тогда

$$m(n,r,s) \le \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

Доказательство. Рассмотрим ребра $A_1, \dots, A_t$: $|A_i| = r$, $|A_i \cap A_j| \neq s$. Каждому множеству сопоставим соответствующий вектор $\overline{x_i}$ из нулей и единиц, а из векторов переходим к соответствующим многочленам $P_{\overline{x_1}}, \dots, P_{\overline{x_t}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_n]$:

$$P_{\overline{x_i}}(\overline{y}) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq s}}^{p-1} \big((\overline{x_i}, y) - j\big).$$

Из многочленов $P_{\overline{x_i}}(\overline{y})$ получим многочлены $\widetilde{P_{\overline{x_i}}}(\overline{y})$ срезанием степеней всех мономов, приведением подобных над $\mathbb{Z}_p$ (далее мы будем подставить в многочлены только векторы из нулей и единиц, поэтому значения $P_{\overline{x_i}}(\overline{y})$ и $\widetilde{P_{\overline{x_i}}}(\overline{y})$ не будут отличаться).

Докажем, что многочлены $\widetilde{P_{\overline{x_i}}}(\overline{y})$ ЛНЗ, откуда будет следовать, что t не превосходит размерности пространства, порожденной мономами $y_{i_1} \dots y_{i_q}$, где $q \le p-1$, а их ровно $\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$ штук.

Пусть $c_1\widetilde{P_{\overline{x_1}}} + \dots + c_t\widetilde{P_{\overline{x_t}}} = 0$. Тогда подставив $\overline{y} = \overline{x_1}$ получим, что $c_1 \neq 0$, а все остальные коэффициенты 0.

Пункт 60

Теорема Франкла-Уилсона для $m(n,k,k-p)$ при $k \ge 2p$.

Будем оценивать $m(n,r,s)$ в случае, когда $r-s=p$, $r-2p \ge 0$. Пусть $d = r-2p+1$.

Теорема.

$$m(n,r,s) \le \frac{C_n^d}{C_r^d} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

Доказательство. Фиксируем гиперграф с множеством ребер $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_t\}$, $|F_i| = r$, $|F_i \cap F_j| \neq s$. Найдем в $\mathcal{F}$ подмножество $\mathcal{F}'$: $|\mathcal{F}'| \ge \frac{C_r^d}{C_n^d}|\mathcal{F}|$ и $\forall F_i, F_j$ $|F_i \cap F_j| \ge d$.

Перечислим все d-элементные подмножества $D_1, \dots, D_{C_n^d}$: $D_i \subset \{1, \dots, n\}$, $|D_i| = d$. Определим индикатор $I(D_i, F_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } D_i \subset F_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. В результате двойного подсчета получаем очевидное равенство

$$\sum_{i=1}^{C_n^d} \sum_{j=1}^{t} I(D_i, F_j) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{t=1}^{C_n^d} I(D_i, F_j) = t \cdot C_r^d = |\mathcal{F}| C_r^d.$$

Значит по принципу Дирихле $\exists D_i$: $|D_i| \ge \frac{C_r^d}{C_n^d}|\mathcal{F}|$. Пусть $\mathcal{F}'$ множество этих ребер. Тогда $\mathcal{F}'$ такой, что $|\mathcal{F}| \le \frac{C_n^d}{C_r^d}|\mathcal{F}'|$, $\mathcal{F}'$ — r-однородный гиперграф на n вершинах, $\forall F_i, F_j \in \mathcal{F}'$ $|F_i \cap F_j| \neq s$, $|F_i \cap F_j| \ge d = r - 2p + 1$.

Продолжение следует…

Пункт 61

Точность обоих теорем Франкла-Уилсона при постоянных k, t. Максимальное число k-элементных подмножеств n-элементного множества, из которых любые два элемента пересекаются не более чем по t элементам. Связь с теорией кодирования, теорема Рёдля (б/д).

Найдем асимптотику $m(n,r,s)$ при фиксированных r, s. С одной стороны

$$m(n,r,s) \leq \frac{C_n^d}{C_r^d} \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k \sim \frac{n^{2s-r+1}}{(2s-r+1)!} \cdot \frac{(2s-r+1)!}{r!} \cdot \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!} = \frac{n^s(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}.$$

С другой стороны

$$m(n,r,s) \geq C_{2r-s-1}^r \cdot h(n, 2r-s-1, s-1) \sim \frac{(2r-s-1)!}{r! \cdot (r-s-1)!} \cdot \frac{n^s}{s!} \cdot \frac{s! \cdot (2r-2s-1)!}{(2r-s-1)!} =$$
$$= \frac{n^s(2r-2s-1)!}{r!\,(r-s-1)!}.$$

Связь с теорией кодирования – лекция 10

Теорема Рёдля – пункт 20

Пункт 62

Задача об уклонении: верхняя оценка уклонения величиной $\sqrt{2n\ln 2s}$ с доказательством и величиной $6\sqrt{n}$ б/д.

Пусть дан гиперграф $H = (\{1, \dots, n\}, M)$, $|M| = m$, $M = \{M_1, \dots, M_m\}$. Пусть $\chi: \{1, \dots, n\} \to \{-1, 1\}$ — раскраска вершин гиперграфа. Пусть

$$\chi(M_i) \coloneqq \sum_{j \in M_i} \chi(j)$$

$$\operatorname{disc}(M, \chi) \coloneqq \max_i |\chi(M_i)|$$

$$\operatorname{disc}(M) \coloneqq \min_\chi \operatorname{disc}(M, \chi).$$

Теорема 1. $\forall n, m\ \forall M\ \operatorname{disc}(M) \leq \sqrt{2n\ln 2m}$.

Доказательство. Строим случайную раскраску χ: $\chi(i) = \xi_i$, где $\xi_i = \begin{cases} -1, \frac{1}{2} \\ +1, \frac{1}{2} \end{cases}$ и независимы.

$$P\left(|\chi(M_i)| \geq \sqrt{2n\ln 2m}\right) = P\left(\left|\sum_{j \in M_i} \xi_j\right| \geq \sqrt{2n\ln 2m}\right) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2|M_i|}} < 2e^{-\frac{2n\ln 2m}{2n}} = \frac{1}{m}.$$

Значит $P\left(\exists i: |\chi(M_i)| \geq \sqrt{2n\ln 2m}\right) < 1$.

Пункт 63

Энтропия. Свойство полуаддитивности.

Определение. Пусть $X: \Omega \to \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — случайная величина. Тогда *энтропия* есть

$$H(X) \coloneqq -\sum_n P(X = x_n) \cdot \log_2 P(X = x_n).$$

Утверждение. $H(X,Y) \le H(X) + H(Y)$.

Доказательство.

$$H(X,Y) - H(X) - H(Y) = \sum_{x,y} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=x, Y=y)} -$$

$$-\sum_{x} P(X=x) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=x)} - \sum_{y} P(Y=y) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=y)} =$$

$$= \sum_{x,y} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=x, Y=y)} -$$

$$-\sum_{x,y} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=x)} - \sum_{x,y} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=y)} =$$

$$= \sum_{x,y} P(X=x, Y=y) \cdot \log_2 \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(X=x, Y=y)} =$$

$$= \left| \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(X=x, Y=y)} = \frac{1}{z} \right| =$$

$$= \sum_{x,y} \frac{P(X=x, Y=y)}{z} z \log_2 \frac{1}{z} = -\sum_{x,y} P(X=x)P(Y=y) z \log_2 z$$

Заметим, что функция $f(z) = z \log_2 z$ выпукла. Значит по Иенсену

$$\sum_{x,y} P(X=x)P(Y=y) f(z) \ge f\left(\sum_{x,y} P(X=x)P(Y=y) z\right) = f\left(\sum_{x,y} P(X=x, Y=y)\right) = f(1) = 0.$$

Пункт 64

Задача об уклонении: верхняя оценка уклонения величиной $6\sqrt{n}$ с доказательством.

Теорема 3. $\forall$ гиперграфа с n вершинами и n ребрами $\operatorname{disc}(M) \le 6\sqrt{n}$.

Доказательство. Пусть $M = \{M_1, \dots, M_n\}$ — ребра гиперграфа.

Лемма. Существует раскраска в 2 цвета, в которой задействованы как минимум $(1 - 10^{-9})n$ вершин и в которой $\forall i \ |\chi(M_i)| \le 10\sqrt{n}$.

Доказательство. Красим вершины $\{1, \dots, n\}$ в цвета ± 1 с вероятностями $1/2$. Пусть это раскраска χ. Рассмотрим случайные величины $|\chi(M_1)|, \dots, |\chi(M_n)|$. Для каждого из них найдем b_i — ближайшее целое число к $|\chi(M_i)|/20\sqrt{n}$. Понятно, что если $|\chi(M_i)| < 10\sqrt{n}$, то $b_i = 0$, а если $10\sqrt{n} < |\chi(M_i)| < 30\sqrt{n}$, то $b_i = 1$ и т.д. Вычислим их энтропию:

$$P(b_i = 0) = P\left(|\chi(M_i)| < 10\sqrt{n}\right) \ge 1 - 2e^{-50}$$

$$P(b_i = 1) \le P\left(\chi(M_i) > 10\sqrt{n}\right) \le e^{-50}$$

$$P(b_i = -1) \le e^{-50}$$

$$P(b_i = 2) \le P\left(\chi(M_i) \ge 30\sqrt{n}\right) \le e^{-450}$$

…

$$H(b_i) = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(b_i = j)\log_2 P(b_i = j) \le 3\cdot 10^{-20}$$

$$H(b_1, \dots, b_n) \le 3\cdot 10^{-20}\cdot n \coloneqq \varepsilon n.$$

Предположим, что $\forall x\ P(X = x) < 2^{-t}$. Тогда

$$H(X) = -\sum_x P(X = x)\log_2 P(X = x) > t\sum_x P(X = x) = t.$$

Значит $\exists (s_1, \dots, s_n)$: $P(b_1 = s_1, \dots, b_n = s_n) \ge 2^{-\varepsilon n}$. Т.е. количество тех раскрасок χ, для которых $b_1 = s_1, \dots, b_n = s_n$, не меньше $2^{(1-\varepsilon)n}$.

Будем использовать расстояние Хэмминга для векторов из ± 1: $\operatorname{dist}(\bar{x}, \bar{y}) \coloneqq |\{i: x_i \ne y_i\}|$.

Теорема (Kleitman). Пусть в $\{+1, -1\}^n$ есть множество векторов, мощность которого больше, чем $\sum_{i=1}^{r} C_n^i$ с некоторым r. Тогда в этом множестве есть 2 вектора $\bar{x}$, $\bar{y}$: $\operatorname{dist}(\bar{x}, \bar{y}) > 2r$.

Возвращаясь к лемме, если положить $\alpha = \frac{1}{2}(1 - 10^{-9})$ и $r = \alpha n$, то можно компьютером проверить неравенство $2^{(1-\varepsilon)n} > \sum_{i=0}^{r} C_n^i$. Значит по последней теореме в нашем множестве раскрасок есть χ_1, χ_2: $\operatorname{dist}(\chi_1, \chi_2) \ge (1 - 10^{-9})n$. Рассмотрим $\chi: \{1, \dots, n\} \to \{-1, 0, 1\}$, которое имеет вид $\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$. У этого χ не более $10^{-9}n$ нулей. Поскольку ближайшие целые числа к $\chi_1(M_i)/20\sqrt{n}$ и $\chi_2(M_i)/20\sqrt{n}$ совпадают, то $|\chi(M_i)| = \left|\frac{\chi_1(M_i) - \chi_2(M_i)}{2}\right| \le 10\sqrt{n}$. Лемма доказана.

Лемма$'$. Пусть у гиперграфа $r \le 10^{-9}n$ вершин и $\le n$ ребер. Тогда существует раскраска в 2 цвета, в которой задействованы как минимум $(1 - 10^{-40})r$ вершин и в которой $\forall i\ |\chi(M_i)| \le 10\sqrt{r}\sqrt{\ln\frac{n}{r}}$.

Продолжение следует…

Пункт 65

Задача об уклонении: нижняя оценка уклонения величиной $\sqrt{n}/2$ с помощью матриц Адамара.

Теорема 2. Пусть $n = m$. Пусть n — порядок матрицы Адамара. Тогда $\exists M$: $\operatorname{disc}(M) \ge \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Доказательство. Пусть H — матрица Адамара в нормальной форме. Рассмотрим матрицу $\frac{H+J}{2}$, где J — матрица из сплошных единиц. Строчки этой матрицы превратим в множества (ребра гиперграфа) $M_1, \dots, M_n$. Пусть $M = \{M_1, \dots, M_n\}$. Лемма эквивалентна тому, что $\forall \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \{\pm 1\}^n$ у вектора $\left(\frac{H+J}{2}\right)\bar{v}^T$ есть хотя бы одна координата, по модулю большая или равная $\sqrt{n}/2$. Пусть $H\bar{v}^T = (L_1, \dots, L_n)$ и $H = (\overline{h_1} \quad \dots \quad \overline{h_n}) = (h_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Тогда

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 = (H\bar{v}^T, H\bar{v}^T) = \left(\overline{h_1}v_1 + \dots + \overline{h_n}v_n, \overline{h_1}v_1 + \dots + \overline{h_n}v_n\right) =$$

$$= v_1^2\left(\overline{h_1}, \overline{h_1}\right) + \dots + v_n^2\left(\overline{h_n}, \overline{h_n}\right) = n^2.$$

Пусть $\lambda \coloneqq \sum_{i=1}^{n} v_i \vdots 2$. Тогда

$$(H + J)\bar{v}^T = (L_1 + \lambda, \dots, L_n + \lambda).$$

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} L_i + \lambda^2 n = n^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} L_i + \lambda^2 n = n^2 \pm 2\lambda n + \lambda^2 n,$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij} = v_1 n = \pm n.$$

Минимум выражения $n^2 \pm 2\lambda n + \lambda^2 n$ достигается в $\lambda = \pm 1$, но поскольку $\lambda \vdots 2$, то кандидаты на точку минимума — $\lambda = -2, 0, 2$. Получаем, что минимум равен n^2. Значит есть координата у вектора $(H+J)\bar{v}^T$ не меньший $\sqrt{n}$, а у $(H+J)\bar{v}^T/2$ — не меньший $\sqrt{n}/2$.

Пункт 66

Задача о наименьшем числе ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом хотя бы три. Верхние и нижние оценки.

Определение. $m(n) \coloneqq \min\{m \in \mathbb{N} \colon \exists n - \text{однородный гиперграф с } m \text{ ребрами и с } \chi > 2\}$.

Если для n-однородного гиперграфа с $2^{n-1} - 1$ ребрами обозначим A_i событие, показывающее, что i-е ребро одноцветное, то $P(A_i) = 2/2^n = 2^{-n+1}$ и

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}-1} A_i\right) \le (2^{n-1} - 1)2^{-n+1} < 1,$$

т.е. $m(n) \ge 2^{n-1}$.

Теорема 4. $m(n) \le \big(1 + o(1)\big)\frac{e \ln 2}{4} \cdot n^2 \cdot 2^n$.

Доказательство. Пусть $\{1, \dots, v\}$, $v = n^2/2$ —множество вершин. Случайно (с вероятностью $1/C_v^n$) вытаскиваем n вершин. Получаются ребра $M_1, \dots, M_m$. Фиксируем раскраску χ. Пусть в нем a — число единиц, а $v - a$ — число минус единиц. Тогда

$$P(M_i \text{ одноцветно}) = \frac{C_a^n + C_{v-a}^n}{C_v^n} \ge \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n} =: p$$

$$P(M_i \text{ неодноцветно в } \chi) \le 1 - p$$

$$P(\forall i\ M_i \text{ неодноцветно в } \chi) \le (1-p)^m$$

$$P(\exists \chi \colon \forall i\ M_i \text{ неодноцветно в } \chi) \le 2^v(1-p)^m.$$

Если $2^v(1-p)^m < 1$, то с положительной вероятностью $\forall \chi\ \exists i \colon M_i$ одноцветно в χ.

Пункт 68

Хроматическое число пространства. Доказательство конечности. Известные нижние и верхние оценки (б/д). Связь с хроматическим числом дистанционного графа.

Определение. *Хроматическое число пространства* $\chi(\mathbb{R}^n)$ — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все точки пространства, чтобы любые две точки отстоящие друг от друга на расстояние 1 были покрашены в разные цвета:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\left\{\chi: \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi, \forall i\, \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_i\ |\bar{x} - \bar{y}| \neq 1\right\}.$$

Известно, что $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, $\chi(\mathbb{R}^2) \in \{5, 6, 7\}$, $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$, $\chi(\mathbb{R}^4) \leq 54$, $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \left(3 + o(1)\right)^n$.

Покажем, что $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \left(4\sqrt{n}\right)^n$. Рассмотрим куб со стороной 2 в n-мерном пространстве. Разобьем его на маленькие кубики со сторонами $1/2\sqrt{n}$. Тогда диаметр каждого маленького кубика меньше 1, следовательно его можно покрасить в один свет. Покрасим все $\left(2 \cdot 2\sqrt{n}\right)^n$ кубики в разные цвета и размножим большой куб во всем пространстве.

Рассмотрим граф $G(n, 3, 1) = (V, E)$, $V = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n): x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \cdots + x_n = 3\}$, $E = \left\{\{\bar{x}, \bar{y}\}: (\bar{x}, \bar{y}) = 1\right\}$. Он дистанционный, с ребром равным $\sqrt{2}$. Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi\left(G(n, 3, 1)\right) \geq \frac{|V|}{\alpha\left(G(n, 3, 1)\right)} = \frac{C_n^3}{m(n, 3, 1)} \geq \frac{C_n^3}{n} \sim \frac{n^2}{6}.$$

Граф $G(n, r, s)$ тоже дистанционный (с ребром длиной $\sqrt{2(r-s)}$). Аналогично

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi\left(G(n, r, s)\right) \geq \frac{C_n^r}{m(n, r, s)}.$$

Пункт 69

Хроматическое число пространства. Нижняя оценка $\left(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{o}(\mathbf{1})\right)^{\boldsymbol{dim}}$.

Выберем $r = r(n) = [an]$, $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, а $s = s(n)$ так, чтобы $s \sim n/2$ и $r - s = p$ было простым числом:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi\left(G(n, r, s)\right) \geq \frac{C_n^r}{m(n, r, s)} \geq \frac{C_n^{[an]}}{\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k} = \frac{\left(\frac{1}{(1-a)^{1-a} a^a} + o(1)\right)^n}{\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1-\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}}} + o(1)\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1-\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}}}{(1-a)^{1-a} a^a} + o(1)\right)^n = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + o(1)\right)^n = \left(1.207\ldots + o(1)\right)^n.$$

Пункт 70

Проблема Борсука. Подсчет числа Борсука для прямой и плоскости.

Для ограниченного $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определим

$$\operatorname{diam} \Omega = \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \Omega} |\bar{x} - \bar{y}|,$$

$$f(\Omega) = \min\{f: \Omega = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_f, \operatorname{diam}\Omega_i < \operatorname{diam}\Omega\},$$

$$f(n) = \max_{\Omega} f(\Omega).$$

Б.О.О. можно читать, что $\operatorname{diam}\Omega = 1$ и Ω замкнуто и выпукло.

Проблема Борсука: найти $f(n)$.

Известно, что $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$. Рассмотрев правильный симплекс можно показать, что $f(n) \geq n + 1$. Рассмотрев куб и разбив его на маленькие кубики, можно показать, что $f(n) \leq \left(4\sqrt{n}\right)^n$. Известно также, что $f(n) \leq 2^{n-1} + 1$, $f(n) \leq \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + o(1)\right)^n$.

Пункт 71

Проблема Борсука. Нижняя оценка числа Борсука $\boldsymbol{\left(c + o(1)\right)^{\sqrt{dim}}}$.

Теорема. $f(n) \geq \left(1.203\ldots + o(1)\right)^{\sqrt{n}}$.

Доказательство. Пусть p — нечетное простое, $n = 4p$, $V = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n): x_i \in \{-1, 1\}, x_1 = 1, x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1\}$. Тогда $|V| = 2^{n-2}$.

Лемма 1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0(4)$.

Лемма 2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0(p)$.

Доказательство. Условие эквивалентно тому, что либо $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, либо $\bar{x} = \bar{y}$.

Лемма 3. Пусть $W \subset V$: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in W$ $(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$. Тогда $W \leq \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$.

Доказательство. $W = \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_t}\}$, $\left(\overline{x_\iota}, \overline{x_J}\right) \neq 0$ $\left(\Leftrightarrow \left(\overline{x_\iota}, \overline{x_J}\right) \not\equiv 0(p)\right)$. Сопоставим каждому вектору $\overline{x_\iota}$ многочлен $P_{\overline{x_\iota}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \ldots, y_n]$: $P_{\overline{x_\iota}}(\bar{y}) \coloneqq \prod_{j=1}^{p-1}\left(j - (\overline{x_\iota}, \bar{y})\right)$. Затем получаем многочлены $\widetilde{P_{\overline{x_\iota}}}$ раскрыванием скобок и срезанием степеней у каждого монома (множители с четными степенями удаляем, а вместо нечетных показателей пишем 1). Останутся мономы вида $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, $k \leq p - 1$. И т.д.

Из множества $V \subset \mathbb{R}^n$ построим множество $V^* \subset \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V \Leftrightarrow \bar{x}^* = (x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_1, x_2^2, \ldots, x_n^2).$$

Можно считать, что $V^* \subset \mathbb{R}^{C_n^2}$. Имеем

$$(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_ix_j)(y_iy_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\right) = (\bar{x}, \bar{y})^2.$$

Значит

$$|\bar{x}^* - \bar{y}^*|^2 = (\bar{x}^*, \bar{x}^*)^2 + (\bar{y}^*, \bar{y}^*)^2 - 2(\bar{x}^*, \bar{y}^*)^2 = (\bar{x}, \bar{x})^2 + (\bar{y}, \bar{y})^2 - 2(\bar{x}, \bar{y})^2 = 2n^2 - 2(\bar{x}, \bar{y})^2 \geq 2n^2.$$

Пусть $V^* = V_1^* \sqcup \ldots \sqcup V_f^*$, $\operatorname{diam} V_i^* < \operatorname{diam} V^*$. Предположим, что

$$f < \frac{2^{n-2}}{\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k}.$$

В силу взаимной однозначности V и V^* имеем $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_f$ соответственно. По принципу Дирихле $\exists i$:

$$|V_i| \geq \frac{|V|}{f} > \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

Значит по лемме 3 $\exists \bar{x}, \bar{y} \in V_i$: $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, следовательно $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$ реализуют диаметр V^*. Значит

$$f(C_n^2) \geq f(V^*) \geq \frac{2^{n-2}}{\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k}.$$

Пусть $d = C_n^2$. Тогда $d \sim n^2/2$ и $n \sim \sqrt{2} \cdot \sqrt{d}$ и поскольку

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_n^k = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}} + o(1) \right)^n = \big(1.754\ldots + o(1)\big)^n,$$

то

$$f(d) \geq \big(1.139\ldots + o(1)\big)^n = \left(1.139\ldots^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{d}}.$$

Пункт 72

Проблема изоморфизма графов. Полиномиальный алгоритм, работающий почти на всех графах: описание и доказательство корректности (лемма о вероятности события $\overline{C}$ б/д).

Определение. Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными: $G_1 \cong G_2$, если существует биекция $V_1 \leftrightarrow V_2$: $\forall (x, y) \in E_1$ $\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \in E_2$.

Пункт 73

Описание алгоритма AKS (6 шагов). Лемма об оценке r (б/д). Оценка сложности алгоритма. Тождество $(X + a)^p = X^p + a \pmod{p}$. Верхняя оценка на r (б/д).

Алгоритм проверяет число на простоту за полином от логарифма числа.

Шаг 1. Проверяем, верно ли, что $n = a^b$, $b \geq 2$. Если да, то n составное.

Шаг 2. Ищем наименьшее r такое, что у числа n по модулю r показатель $\delta_r(n) > \log_2^2 n$.

Шаг 3. Пробегаем по a от 1 до n и если на какой-то итерации $1 < (a, n) < n$, то n составное.

Шаг 4. Если $n \leq r$, то n простое.

Шаг 5. Если для некоторого a из $1, \ldots, \sqrt{\varphi(r)} \cdot \log_2 n$ верно $(X + a)^n \neq X^n + a \bmod (X^r - 1, n)$, то n составное.

Шаг 6. n простое.

Лемма. $r \leq \max\{3, \lceil \log_2^5 n \rceil\}$.