Решения

Задача 1. Пусть ν_i — мера i-го игрока. После первого разреза образуются куски S_1, S_2, для которых $\nu_1(S_1): \nu_1(S_2) = 1:2$. Пусть второй и третий игроки указывают на тот кусок из S_1, S_2, который есть хотя бы половина пирога для них. Возможны два случая:

Случай 1: они указали на один и тот же кусок $T_1 \in \{S_1, S_2\}$. Тогда второй делит T_1 на равные (с его точки зрения) части T_{11}, T_{12}, третий выбирает, например, T_{11} из этих двух частей, второй получает другой из них (в данном случае T_{12}), а первый получает T_2, где $\{T_1, T_2\} = \{S_1, S_2\}$. Тогда $\nu_1(T_2) \geq \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\nu_2(T_{12}) = \frac{1}{2}\nu_2(T_1) \geq \frac{1}{4}$ и $\nu_3(T_{11}) \geq \frac{1}{2}\nu_3(T_1) \geq \frac{1}{4}$ (т.к. третий выбирал до второго).

Случай 2: они указали на разные куски, например второй на S_1, третий — на S_2. Тогда третий делит S_2 пополам на куски S_{21}, S_{22}, первый выберет свой кусок из этих двух (например, S_{21}), третий получит другой из них (S_{22}), а второй получит S_1. Тогда $\nu_1(S_{21}) \geq \frac{1}{2}\nu_1(S_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} > \frac{1}{4}$ (т.к. первый выбирал до третьего), $\nu_2(S_1) \geq \frac{1}{2}$ и $\nu_3(S_{22}) = \frac{1}{2}\nu_3(S_2) \geq \frac{1}{4}$.

Задача 2. а) Крикнувший, например, Б, выбирает себе либо $Y \sqcup X_1$, либо $Z \sqcup X_2$, другой из них достается А, а X_R достается В. Поскольку X_R уменьшается, а другие два куска становятся больше, то Б (или же В) должен крикнуть в момент, когда $\max(Y \sqcup X_1, Z \sqcup X_2) \sim X_R$.

Тогда так как $\nu_1(Y \sqcup X_1) = \nu_1(Z \sqcup X_2) \geq \nu_1(X_R)$, то А не завидует никому не завидует, Б не завидует никому, так как он первым выбирает из $Y \sqcup X_1$ и $Z \sqcup X_2$, а В не завидует никому, так как в противном случае он бы заранее крикнул и ему достался бы кусок побольше.

б) Крикнувший, например, Б, выбирает себе один кусок из Y, Z и один кусок из X_1, X_2, другие два достаются А, а X_R достается В. Тогда правильный момент крика тогда, когда $\max(Y, Z) \sqcup \max(X_1, X_2) \sim X_R$.

Снова, Б не завидует никому, поскольку он выбирает первым, В не завидует никому в силу равенства в момент крика, а А не завидует никому, поскольку ее кусок равен куску Б и не меньше куска В.

в) Для А нет разницы между вариациями а) и б), поскольку ей все равно достается кусок той же меры $u + v$, где $u = \nu_1(X_1) = \nu_1(X_2)$ и $v = \nu_1(Y) = \nu_1(Z)$.

Задача 3. а) A делит пирог на 4 равные части. Каждый из B, C, D указывает на наименьшие для него три куска. Куски указанные B и куски, указанные C имеют пересечение хотя бы два, а вот один из этих двух кусков был указан D. Этот кусок достается A, а остальные (не важно как) распределяются между B, C, D. Тогда между A и B, C, D нет зависти, т.к. A получил ровно четверть пирога, а каждый из B, C, D считает, что получил не меньше A.

б) B делит пирог на 4 равные части $S_1, \dots, S_4$. Каждый из A, C, D указывает на наибольшую часть.

Случай 1: все указали на разные куски. Все получают соответствующие куски, а остаток достается B.

Случай 2: на какой-то кусок указали двое, а другой указал на другой кусок. Есть 3 подслучая:

2.1. A, C указали на S_1, D указал на S_2. Тогда C достается S_1, D — S_2, A — $\max(S_3, S_4)$, B — остаток.

2.2. A, D указали на S_1, C указал на S_2. Тогда C достается S_2, D — S_1, A — $\max(S_3, S_4)$, B — остаток.

2.3. C, D указали на S_1, A указал на S_2. Тогда A достается S_2, а на остальном пироге совершается протокол Селфриджа-Конвея: B уже делил оставшийся пирог на три равные части S_1, S_3, S_4. Без ограничения общности $S_1 \gtrsim S_3 \gtrsim S_4$ для C. Пусть $S_1 = S_1' \sqcup R$, где $S_1' \sim S_2$ для C. D выбирает из S_1', S_2, S_3. Если D не взял S_1', то C берет S_1', иначе берет S_3. B берет остаток S_4. Затем тот из C, D, кто не получил S_1', делит R на 3 части. Выбирают в порядке получивший S_1', B, деливший R. Пирог так будет раздаваться протоколом Селфриджа-Конвея, но в отличии от него на последнем шаге то, что выбрал B делится на две равные части (с точки зрения B) и A выбирает себе большую половину, а остальная половина достается B. Таким образом A не завидует B и обратно, а также никто из B, C, D не завидует друг друга (B не может завидовать ни C, ни D, поскольку ему и так досталась четверть пирога — S_4, который не меньше кусков C и D; в другие стороны отсутствие зависти было доказано в лекции).

Случай 3: A, C, D указали на один и тот же кусок. Тогда A достается максимальный из оставшихся трех кусков, а после этого раздаем остаток пирога B, C, D как в случае 2.3. A и B не завидуют друг другу, а между B, C, D зависть вообще отсутствует.

в) Для удобства заменим имена агентов из D, A, B, C на A, B, C, D (похоже пункту б). Решение этого пункта совпадает с решением пункта б.