

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики
Спецкурс «Сюжеты из теории игр», весна 2022
Домашнее задание про справедливый делёж

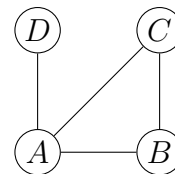
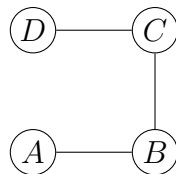
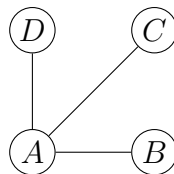
Срок сдачи — 19 апреля. Ответы присылайте в телеграм @musatych.

1. (Быстрый делёж, 10 баллов) Рассмотрим протокол для троих агентов, начинающийся так: первый игрок делит пирог в отношении $1 : 2$. Покажите, как сделать ещё *один* разрез и распределить получившиеся части, чтобы каждый из игроков считал, что ему досталась хотя бы $\frac{1}{4}$ от пирога.

2. (Протокол Левмора–Кук, 15 баллов) Рассмотрим такой протокол дележа пирога без зависти на троих при помощи двух движущихся ножей. Сначала Алёна делит пирог на 3 равные по её мнению части. Борис и Виктор указывают две наилучшие части с их точек зрения. Если это разные части, то они получают указанные кучки, а Алёна оставшийся. Если это одна часть (обозначим её за X , а две другие за Y и Z), то Алёна берёт два ножа и начинает их двигать вдоль X , так чтобы образовывались части X_1 , X_2 и X_R , такие что с точки зрения Алёны X_1 и X_2 равноценны. В любой момент Борис или Виктор могут крикнуть: «Стоп!» — и забрать себе либо Y и X_1 , либо Z и X_2 .

- а) (4 балла) Как нужно распределить оставшиеся куски, чтобы не было зависти? Докажите, что зависти не будет.
- б) (3 балла) Пусть крикнувший может скомбинировать пару любым из 4 способов, т.е. взять любой кусок из Y и Z и любой из X_1 и X_2 . Модифицируйте алгоритм и докажите, что зависти вновь не будет.
- в) (3 балла) Пусть Алёна может выбрать одно из указанных правил. Какое она выберет, чтобы получить как можно больше? Почему?
- г) (5 баллов) Пусть Алёна знает предпочтения Виктора и Бориса. Как она будет действовать? (Полный разбор не обязателен, опишите 2–3 типичных случая).

3. (Делёж без локальной зависти, 15 баллов) Рассмотрим задачу о дележе пирога в социальной сети. Рассмотрим 4 агентов и три конфигурации: звезда, цепочка и хвостатый треугольник (все рёбра двусторонние). В следующих вопросах под протоколом имеется в виду конечный ограниченный протокол (без движущихся ножей). При ответе можно использовать известные вам протоколы как подпрограммы.



- а) (5 баллов) Предложите протокол дележа без локальной зависти для звезды.
- б) (5 баллов) Предложите протокол дележа без локальной зависти для цепочки.
- в) (5 баллов) Предложите протокол дележа без локальной зависти для хвостатого треугольника.