22.1.5. Разложим в ряд Фурье функцию $\sin^8 x + \cos^8 x$:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x = 1 - \sin^2 2x + \frac{\sin^4 2x}{8} =$$

$$= 1 - \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{32}(1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x) =$$

$$= \frac{17}{32} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{64} = \boxed{\frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x}.$$

22.11. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2x, -\pi < x \le 0 \\ 3x, 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

Нам понадобятся интегралы

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int xd(\sin nx) = \frac{1}{n}\left(x\sin nx - \int \sin nx\,dx\right) = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C$$

и

$$\int x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\int xd(\cos nx) = -\frac{1}{n}\left(x\cos nx - \int \cos nx\,dx\right) = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + C.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(-2\int_{-\pi}^{0} xdx + 3\int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{5\pi^2}{2} = \frac{5\pi}{4};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-2\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + 3\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n}\right) + 3\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-2\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx + 3\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\left(\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) + 3\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)\right) = \frac{-5(-1)^n}{n}.$$

Отсюда

$$\boxed{f(x) \sim \frac{5\pi}{4} - 5\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right),\quad -\pi < x < \pi}.$$

22.14. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на промежутке $[-1, 1]$ и с периодом $2l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-1}^{1} f(x)x = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos \pi n x\,dx = 2\left(\frac{x\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2};$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\sin n\pi x\,dx = 0.$$

Отсюда

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos \pi n x = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{4}{n^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos \pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}}.$$

22.30. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = \pi - 2x$, $0 < x \le \pi$, продолжив ее на отрезок $[-\pi, 0]$: 1) четным образом; 2) нечетным образом.

1) $f(x) = \begin{cases} \pi + 2x, x \in (-\pi, 0] \\ \pi - 2x, x \in (0, \pi] \end{cases}$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + 2x)dx + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left((\pi x + x^2)|_{-\pi}^{0} + (\pi x - x^2)|_0^{\pi}\right) = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + 2x)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + 2\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx - 2\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} - \left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} - \left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{4}{\pi n^2}(1 - (-1)^n);$$

$$b_n = 0\ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда получаем, что

$$\boxed{f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\big((2n-1)x\big)}{(2n-1)^2}}.$$

2) $f(x) = \begin{cases} -\pi - 2x, x \in (-\pi, 0] \\ \pi - 2x, x \in (0, \pi] \end{cases}$.

$$a_n = 0\ \forall n = 0, 1, \ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\pi-2x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-2x)\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\pi\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)-2\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}+\frac{4}{n}(-1)^n=\frac{1}{n}(1-(-1)^n)-\frac{1}{n}((-1)^n-1)+\frac{4}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(1+(-1)^n)$$

Отсюда получаем

$$\boxed{f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2nx}{n}}.$$

22.42. Разложим в ряд Фурье на $(0,\pi)$ по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x, 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}.$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi}{8};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin\frac{\pi n}{2}}{2n}+\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi n}{2}}{n^2}=\frac{4\sin^2\frac{\pi n}{4}}{\pi n^2}.$$

$$\boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{n^2}\cos nx}.$$

22.45. Разложим функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье

1) на отрезке $[-\pi,\pi]$ по косинусам;

2) на интервале $(0,\pi)$ по синусам;

3) на интервале $(0,2\pi)$ по синусам и косинусам.

1) Сначала заметим, что

$$\int x^2\cos nx\,dx=|nx=t|=\frac{1}{n^3}\int t^2\cos t\,dt=\frac{1}{n^3}\int t^2 d\sin t=\frac{1}{n^3}\left(t^2\sin t-\int\sin t\cdot 2tdt\right)=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(t^2\sin t+2\int td\cos t\right)=\frac{1}{n^3}\left(t^2\sin t+2\left(t\cos t-\int\cos t\,dt\right)\right)=$$

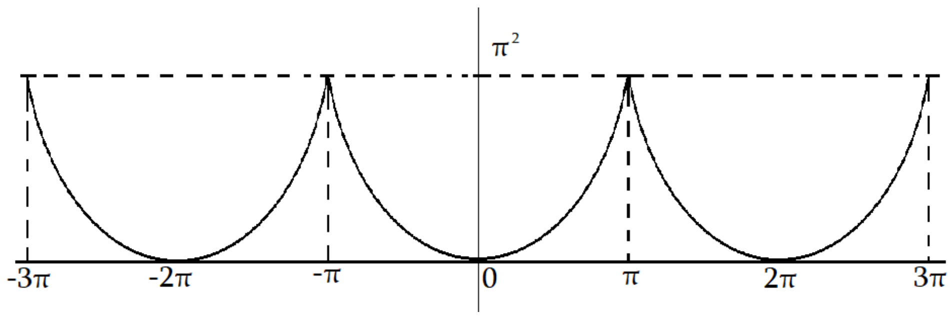
$$= \frac{1}{n^3}(t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t) + C = \frac{1}{n^3}(n^2 x^2 \sin nx + 2nx \cos nx - 2 \sin nx) + C.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi n^3}(n^2 x^2 \sin nx + 2nx \cos nx - 2 \sin nx)|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^3} \cdot 2n \cdot 2\pi \cdot (-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n;$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}(-1)^n}.$$



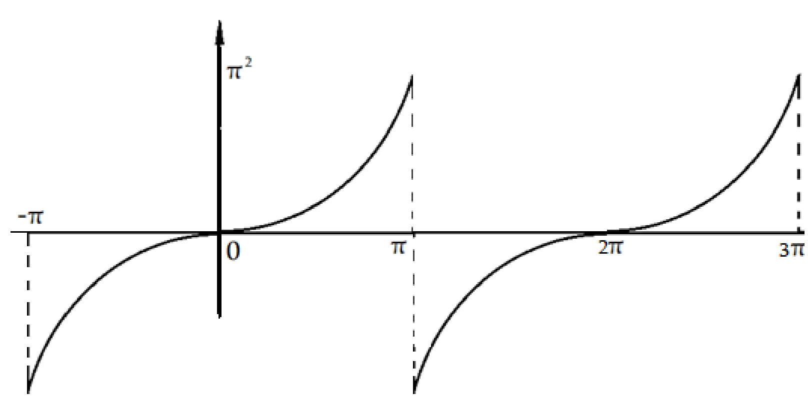
2) Сначала заметим, что

$$\int x^2 \sin nx \, dx = |nx = t| = \frac{1}{n^3} \int t^2 \sin t \, dt = -\frac{1}{n^3} \int t^2 d \cos t = \frac{1}{n^3}\left(\int \cos t \cdot 2t dt - t^2 \cos t\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(-t^2 \cos t + 2 \int t d \sin t\right) = \frac{1}{n^3}\left(-t^2 \cos t + 2\left(t \sin t - \int \sin t \, dt\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}(-t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t) + C = \frac{1}{n^3}(-n^2 x^2 \cos nx + 2nx \sin nx - 2 \cos nx) + C$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n^3}(n^2 x^2 \cos nx + 2nx \sin nx - 2 \cos nx)|_0^{\pi} =$$



$$= \frac{2}{\pi n^3}(-n^2\pi^2(-1)^n - 2(-1)^n + 2) = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}(1-(-1)^n)\right);$$

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx}.$$

3)

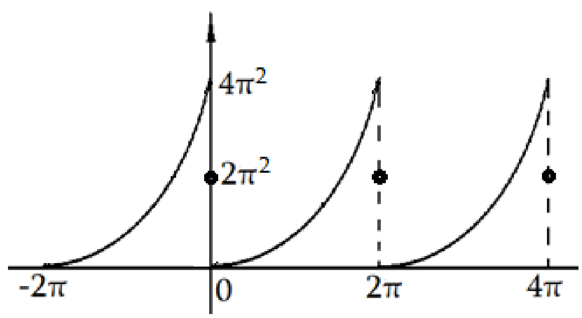
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi n^3}(n^2x^2\sin nx + 2nx\cos nx - 2\sin nx)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^3}2n\cdot 2\pi = \frac{4}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi n^3}(-n^2x^2\cos nx + 2nx\sin nx - 2\cos nx)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^3}(-4n^2\pi^2) = -\frac{4\pi}{n};$$

$$\boxed{\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)}.$$



Из ответа пункта 1) получаем

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}};$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\cdot 0)}{n^2}(-1)^n = \frac{\frac{\pi^2}{3} - 0^2}{4} = \boxed{\frac{\pi^2}{12}};$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{S_1 - S_2}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

Исследуем ряды из пунктов 1-3 на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$. Первый ряд, очевидно, равномерно сходится, поскольку

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^2}(-1)^n\right| < \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

22.23. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos ax$, $a \notin \mathbb{Z}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\,dx = \frac{1}{2\pi a}\sin ax\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin a\pi - \sin(-a\pi)}{2\pi a} = \frac{\sin\pi a}{\pi a};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\big((n+a)x\big) + \cos\big((n-a)x\big)}{2}dx =$$

$$= \frac{\sin\big((n+a)\pi\big)}{(n+a)\pi} + \frac{\sin\big((n-a)\pi\big)}{(n-a)\pi} =$$

$$= \frac{(n-a)\sin n\pi\cos a\pi + (n-a)\cos n\pi\sin a\pi + (n+a)\sin n\pi\cos a\pi - (n+a)\cos n\pi\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi} =$$

$$= \frac{-2a\cos n\pi\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi} = \frac{-2a(-1)^n\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi};$$

$$b_n = 0;$$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{\sin\pi a}{\pi a} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi a}{n^2-a^2}\cos nx}.$$

22.65. Докажем, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция удовлетворяет условию $f(\pi - x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами:

1) при разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1} = 0, n \in \mathbb{N}$;

2) при разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}$.

1) Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right]\Bigg|_{y=\pi-x} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)d(-y)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)dy\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right]\Bigg|_{y=\pi-x} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\cos n(\pi-y)\,d(-y)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\cos ny\,dy\right] = \frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx.$$

Значит при $2 \nmid n$ $a_n = 0$.

2) Имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\sin n(\pi-y)\,d(-y)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin ny\cos n\pi\,dy\right] = \frac{2}{\pi}[1-(-1)^n]\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx.$$

Значит при $2|n$ $b_n = 0$.

22.67. Продолжим абсолютно интегрируемую на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функцию на отрезок таким образом, чтобы ее ряд Фурье имел вид $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x$.

Пусть $b_n = B_{2n-1}$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

Итак, $f(-x) = -f(x)$, значит $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mx$. Имеем

$$0 = B_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx\right]\Bigg|_{y=\pi-x} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\sin 2n(\pi-y)\,d(-y)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\sin 2ny\,dy\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\sin 2nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)-f(\pi-x)]\sin 2nx\,dx.$$

Пусть $f(\pi-x) = f(x)$ $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $B_{2n} = 0$. Итак, ответ: $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi-x) = f(x)$.

22.110. [1] Покажем, что если тригонометрический ряд $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$ сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы $S(x)$. $S(x)$ непрерывна и 2π-периодична. Имеем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=2\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}-b_n\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi a_0;$$

$$S(x)\cos mx=a_0\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\cos mx=$$

$$=a_0\cos mx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos(n+m)x+\cos(n-m)x)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x);$$

$$S(x)\sin mx=a_0\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\sin mx=$$

$$=a_0\sin mx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\sin(n+m)x-\sin(n-m)x)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos mx\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\,dx\right)=\frac{1}{2}a_m\cdot 2\pi=\pi a_m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin mx\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\,dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx\right)=\frac{1}{2}b_m\cdot 2\pi=\pi b_m;$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx\,,\, a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos mx\,dx\,,\, b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin mx\,dx}.$$

22.111.3. Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},$$

[1] Бесов, стр. 365, лемма 1, стр. 367, первый абзац.

а при $\alpha > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ равномерно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx$ тоже равномерно сходится, а значит и является рядом Фурье своей суммы.

Т 1. Исследуем на равномерную сходимость ряды Фурье функции $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi/2]$ по системам

а) $\{\sin(2k-1)x\}|_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}|_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}|_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}|_{k=0}^{\infty}$.

а) Пусть $f(x) = f(\pi - x)$, $f(-x) = -f(x)$. Тогда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\Bigg|_{x=\pi-y} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\sin n(\pi-y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin n(\pi-y)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx - \cos n\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin ny\,dy\right) = \frac{2}{\pi}(1-(-1)^n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx.$$

Если $n = 2k$, то $b_n = 0$, а если $n = 2k-1$, то

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k-1)x\,de^x = e^x\sin(2k-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2k-1)e^x\cos(2k-1)x\,dx =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) - (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(2k-1)x\,dx =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-\cos k\pi) - (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k-1)x\,de^x =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} - (2k-1)\left[e^x\cos(2k-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(2k-1)x\,dx\right] =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} - (2k-1)\left[e^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) - 1 + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx\right] =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} - (2k-1)\left[-1 + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx\right] =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} + (2k-1) - (2k-1)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx\,;$$

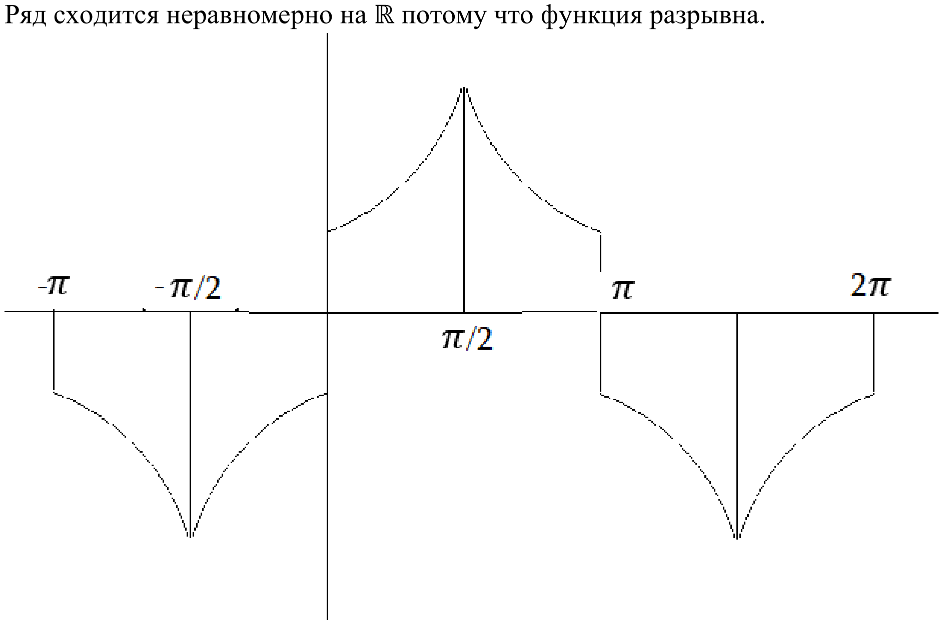
$$[1 + (2k-1)^2]\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} + (2k-1);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2k-1)x\,dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} + (2k-1)}{1 + (2k-1)^2};$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} + (2k-1)}{1 + (2k-1)^2};$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1} + (2k-1)}{1 + (2k-1)^2}\sin(2k-1)x.$$

Ряд сходится неравномерно на $\mathbb{R}$ потому что функция разрывна.



б) Пусть $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = -f(x)$. Тогда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\Bigg|_{x=\pi-y}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-y)\sin n(\pi-y)\,d(-y)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)(-\cos n\pi)\sin ny\,dy\right)=\frac{2}{\pi}(1+(-1)^n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx.$$

Если $n=2k-1$, то $b_n=0$, а если $n=2k$, то

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2kx\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2kx\,de^x=e^x\sin 2kx|_0^{\frac{\pi}{2}}-2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2kx\,dx=-2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx\,de^x=$$

$$=-2k\left(e^x\cos 2kx|_0^{\frac{\pi}{2}}-2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin 2kx)dx\right)=-2k\left(e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^k-1+2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2kx\,dx\right)=$$

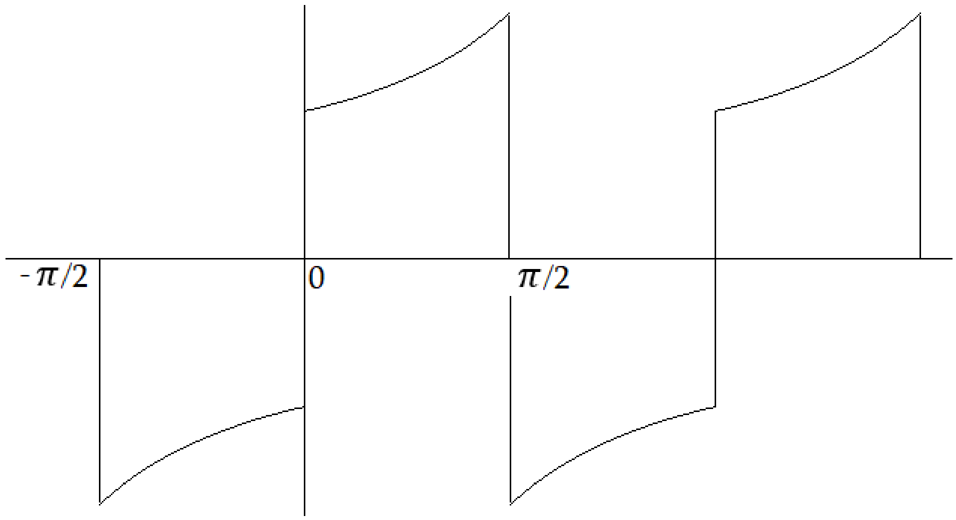
$$=2ke^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1}+2k-4k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2kx\,dx\,;$$

$$(1+4k^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2kx\,dx=2ke^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1}+2k;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2kx\,dx=\frac{2ke^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1}+2k}{(1+4k^2)};$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\left(e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{k+1}+1\right)}{(1+4k^2)}\sin 2kx.$$

Ряд сходится неравномерно, так как сумма ряда разрывна.



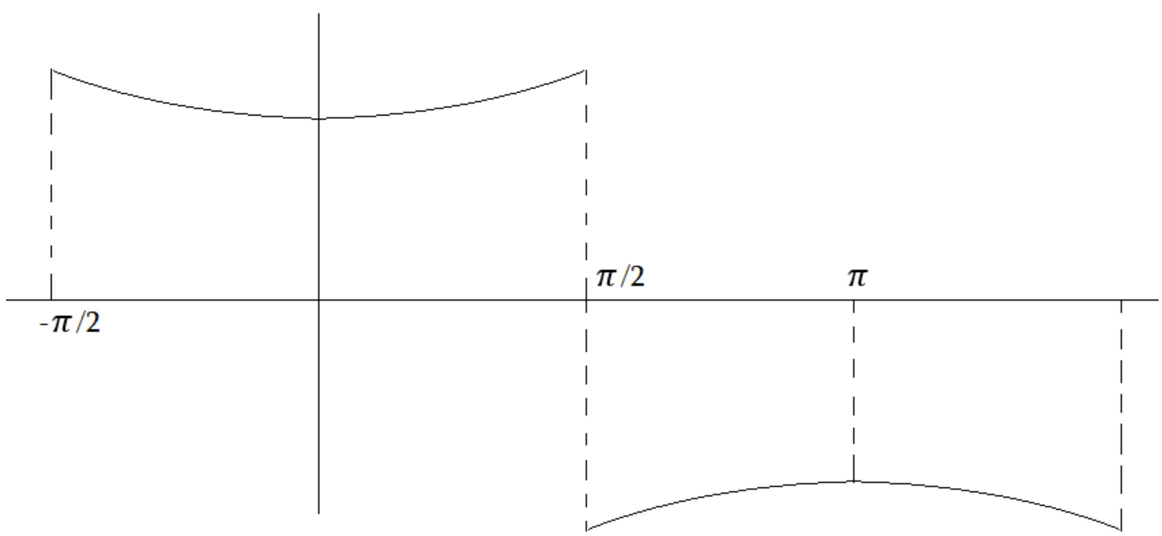
в) Пусть $f(x) = f(-x)$, тогда $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Для $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)\Bigg|_{x=\pi-y} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + (-1)^n f(\pi - x)]\cos nx\,dx.$$

Если $n = 2k$, то $a_n = 0$, $f(x) + (-1)^{2k} f(\pi - x) = 0$, $f(\pi - x) = -f(x)$.

Ряд сходится неравномерно.



г) Пусть $f(-x) = f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right)\Bigg|_{x=\pi-y} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x) + f(\pi - x)\big) dx \neq 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right) \Bigg|_{y = \pi - x} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - y) \cos n(\pi - y) \, d(-y) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx + \cos n\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \cos ny \, dy \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + (-1)^n f(\pi - x)] \cos nx \, dx.$$

Если $n = 2k - 1$, то $a_n = 0$, $f(x) + (-1)^{2k-1} f(\pi - x) = 0$, $f(x) = f(\pi - x)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x) dx \,;$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = \frac{2}{\pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x) \cos nx \, dx \,;$$

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \, de^x = \frac{4}{\pi} \left(e^x \cos 2nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n - 1 + 2n \left(e^x \sin 2nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2nx \, dx \right) \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n - 1 - 4n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2nx \, dx \right);$$

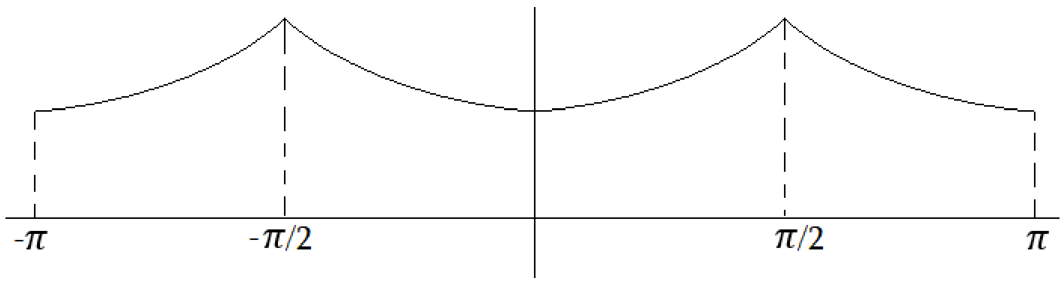
$$a_{2n} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n - 1}{4n^2 + 1};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n - 1}{4n^2 + 1}\cos 2nx.$$

Ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, т.к.

$$|a_{2n}\cos nx| \le |a_{2n}| \le \frac{4e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi(4n^2 + 1)} = b_n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.



Т 2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определим порядок их убывания а) x^{10}; б) x^5; в) $(x^2 - \pi^2)^{10}$; г) $(\pi^2 - x^2)\sin^2 x$.

а) $f(x) = x^{10}$, $f(x) = f(-x)$, $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^{10} dx > 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^{10}\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^{10} d\,\frac{\sin nx}{n} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^{10}\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \cdot 10x^9 dx\right] =$$

$$= -\frac{2 \cdot 10}{\pi n}\int_0^{\pi} x^9 \sin nx\, dx = -\frac{20}{\pi n}\int_0^{\pi} x^9 d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{20}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x^9 d\cos nx =$$

$$= \frac{20}{\pi n^2}\left[x^9 \cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \cdot 9x^8 dx\right] = \frac{20\pi^8}{n^2}(-1)^n - \frac{20 \cdot 9}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x^8 \cos nx\, dx.$$

По теореме Римана $\int_0^{\pi} x^8 \cos nx\, dx \to 0$ при $n \to \infty$. Значит

$$a_n = \frac{20\pi^8}{n^2}(-1)^n + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и порядок убывания коэффициентов Фурье равен 2.

б) $f(x) = x^5$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^5 \sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^5 d\,\frac{\cos nx}{n} = -\frac{2}{\pi}\left(x^5\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \cdot 5x^4 dx\right) =$$

$$= -\frac{2\pi^4}{n}(-1)^n + \frac{10\pi}{n}\int_0^{\pi} x^4 \cos nx\, dx.$$

По теореме Римана $\int_0^{\pi} x^4 \cos nx\, dx \to 0$ при $n \to \infty$. Значит

$$b_n = \frac{2\pi^4}{n}(-1)^{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

и порядок убывания коэффициентов равен 1.

в) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^{10} = (x+\pi)^{10}(x-\pi)^{10}$, $f(-x) = f(x)$,

$$f'(x) = 10(x+\pi)^9(x-\pi)^{10} + 10(x+\pi)^{10}(x-\pi)^9 = 20x(x+\pi)^9(x-\pi)^9,$$

$f'(-x) = -f'(x)$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, $f'(-\pi) = f'(\pi) = 0$, $\ldots$, $f^{(9)}(-\pi) = f^{(9)}(\pi) = 0$, $f^{(10)}(-\pi) \neq 0, f^{(10)}(\pi)$. $f^{(10)}(x)$ — четная, значит порядок убывания коэффициентов Фурье $f^{(10)}(x)$ равен 2, значит порядок убывания коэффициентов Фурье $f^{(9)}(x)$ равен 3,…, порядок убывания коэффициентов Фурье $f(x)$ равен 12.

г) $f(x) = (x^2 - \pi^2)\sin^2 x$, $f(x) = f(-x)$, $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\sin^2 x\, dx \leq 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\sin^2 x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)(1 - \cos 2x)\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos nx\, dx - \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos 2x \cos nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos nx\, dx - \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\frac{\cos(n+2)x + \cos(n-2)x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos nx\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(n+2)x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(n-2)x\, dx\right)$$

$$\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos nx\, dx = \left.\frac{(x^2 - \pi^2)\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\left(x\cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right) = \frac{2}{n^2}\pi(-1)^n;$$

$$\int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\cos(n+2)x\, dx = \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) d\frac{\sin(n+2)x}{n+2} = (x^2 - \pi^2)\left.\frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right|_0^{\pi} -$$

$$-\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+2)x}{n+2}\cdot 2xdx = \frac{2}{n+2}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\cos(n+2)x}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{2}{(n+2)^2}\left(x\cos(n+2)x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(n+2)x\,dx\right) = \frac{2}{(n+2)^2}\pi(-1)^n;$$

$$\int_0^\pi (x^2-\pi^2)\cos(n-2)x\,dx = \frac{2}{(n-2)^2}\pi(-1)^n;$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\pi(-1)^n - \frac{1}{(n+2)^2}\pi(-1)^n - \frac{1}{(n-2)^2}\pi(-1)^n\right) = (-1)^n\left(\frac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2} + \frac{4(n-1)}{n^2(n-2)^2}\right) =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{(n+1)(n^2-4n+4)+(n-1)(n^2+4n+4)}{(n-2)^2(n+2)^2} = \frac{4(-1)^n(2n^3+2n^2)}{n^2(n-2)^2(n+2)^2} =$$

$$= \frac{8(-1)^n(n+1)}{(n^2-4)^2}.$$

Значит порядок убывания коэффициентов равен 3.

22.121. Проинтегрировав почленно разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

получим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}.$$

Проинтегрировав, получаем

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x - C.$$

Подставив $x = 0$ находим

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

откуда получаем требуемое.

22.116. С помощью равенства Парсеваля

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

вычислим суммы рядов $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-6}$. Имеем

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\,;$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,;$$

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(6-\pi^2 n^2)}{n^3}\sin nx.$$

Значит

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx \Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9}\right) = \boxed{\frac{\pi^4}{90}};$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36-12\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4}{n^6} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx \Leftrightarrow 144S_2 - 48\pi^2 S_1 + 4\pi^4 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^6}{7} \Leftrightarrow S_2 = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}.$$

16.48.1. Покажем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ суммируется методом Чезаро, найдя σ_n и σ:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}; \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)}.$$

Отсюда видно, что $\sigma_n \to \sigma = \boxed{1/2}$.

16.48.3. То же самое, но для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\theta$, $0 < |\theta| < \pi$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} - \frac{e^{-i(n+1)\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1 + e^{-in\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1};$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{i(k+1)\theta} - 1 + e^{-ik\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} =$$

$$= \frac{1}{2i(n+1)(e^{i\theta} - 1)}\left(-(n+1)\left(1 + e^{i\theta}\right) + e^{i\theta} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + \frac{e^{-i(n+1)\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1}\right) =$$

$$= -\frac{e^{i\theta} + 1}{2i(e^{i\theta} - 1)} + \frac{1}{2i(n+1)(e^{i\theta} - 1)} \cdot \frac{e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{e^{-i\theta} - 1} =$$

$$= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i(2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta})} - \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta \cdot \frac{1}{2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} - \frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)(1-\cos\theta)} =$$

$$= \frac{(n+1)\sin\theta - \sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)(n+1)} = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} - \frac{\sin(n+1)\theta}{4\sin^2\theta/2\,(n+1)} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(n+1)\theta}{4\sin^2\theta/2\,(n+1)}}.$$

$$\sigma_n \to \sigma = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}.$$

Т 3. Докажем связи между разными видами сходимости.

$\boxed{f_n \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[L_2]{} f}$. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1.$$

Значит

$$\|f_n - f\| = \left(\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b \varepsilon_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1\sqrt{b-a} = \varepsilon$$

и $\|f_n - f\|_{L_2} \to 0$.

$\boxed{f_n \underset{L_2}{\to} f \Longrightarrow f_n \underset{L_1}{\to} f}$. Имеем, что

$$\int_a^b |uv|dx \le \left(\int_a^b u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b v^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $u = f_n - f$, $v = 1$. Тогда

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \|f_n - f\|_{L_1} \le \sqrt{b-a}\|f_n - f\|_{L_2}.$$

Значит при $\|f_n - f\|_{L_2} \to 0$ имеем $\|f_n - f\|_{L_1}$, ч.т.д.

$\boxed{f_n \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f}$. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

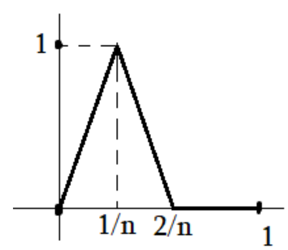
Значит

$$\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \nRightarrow f_n \rightrightarrows f}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 2 - nx, x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

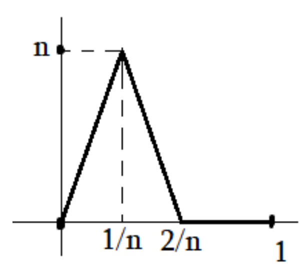


$f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [0,1]$. Но $f_n(1/n) = 1$, следовательно

$$\exists \varepsilon = 1: \forall N\ \exists n \ge N\ \exists x = 1/n \in [0,1]: |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon = 1.$$

$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \nRightarrow f_n \underset{L_1}{\to} f}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 2n - n^2x, x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$



$f(x) = 0, x \in [0, 1]$. Тогда $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in [0, 1]$. Но

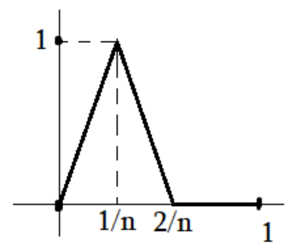
$$\|f_n - f\|_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x) dx = 1.$$

$\boxed{f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \nRightarrow f_n \underset{L_2}{\to} f}$. Определим $f(x)$, $f_n(x)$ те же. Тогда $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in [0, 1]$. Но

$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (n^2 x)^2 dx = 2n^4 \cdot \frac{1}{3n^3} = \frac{2}{3} n \to \infty.$$

$\boxed{f_n \underset{L_2}{\to} f \nRightarrow f_n \rightrightarrows f}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 2 - nx, x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$



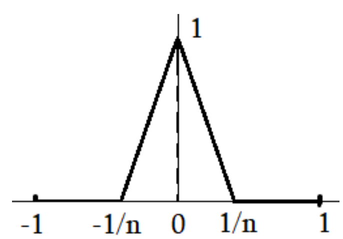
$f(x) = 0, x \in [0, 1]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (nx)^2 dx = 2n^2 \cdot \frac{1}{3n^3} = \frac{2}{3n} \to 0.$$

Но $f_n(1/n) = 1$, следовательно f_n не сходится к f равномерно.

$\boxed{f_n \underset{L_1}{\to} f \nRightarrow f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ 1 + nx, x \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right], \\ 1 - nx, x \in \left(0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases},$$



$f(x) = 0, x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_{L_1} = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx = \frac{1}{n} \to 0.$$

Но $f_n \nrightarrow f$ поточечно, поскольку $f_n(0) = 1, f(0) = 0$.

$\boxed{f_n \underset{L_2}{\to} f \nRightarrow f_n \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f}$. $f_n(x)$ и $f(x)$ те же. Тогда

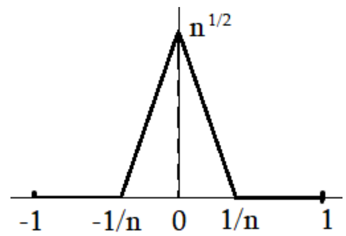
$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx = 2\left(x - nx^2 + \frac{n^2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{n}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{2}{3n} \to 0.$$

Но $f_n \nrightarrow f$ поточечно, поскольку $f_n(0) = 1, f(0) = 0$.

$\boxed{f_n \underset{L_1}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{L_2}{\to} f}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ n^{\frac{1}{2}}(1+nx), x \in \left(-\frac{1}{n}, 0\right], \\ n^{\frac{1}{2}}(1-nx), x \in \left(0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases},$$



$f(x) = 0, x \in [-1, 1]$. Тогда

$$\|f_n - f\|_{L_1} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{2}}(1-nx) dx = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0.$$

Но

$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)^2 dx = 2n\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

18.97. Докажем, что подпространство непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a;b]$ не является полным. Определим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} + \sqrt{\frac{2}{n^2} - x^2}, \text{если } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ |x|, \text{иначе} \end{cases}$$

т.е. функции f_n состоят из куска окружности и двух лучей, лежащих в $|x|$, причем последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и приближается к $|x|$, но не сходится в пространстве $C[a;b]$, поскольку $|x| \notin C[a;b]$.

19.116.1. В подпространстве $C^*[-\pi, \pi]$ пространства $C[-\pi, \pi]$, состоящем из таких функций $x(t)$, что $x(-\pi) = x(\pi)$, система

$$\{1; \cos x; \sin x; \dots; \cos nx; \sin nx; \dots\}$$

полна, а система

$$\{1; \cos x; \cos 2x; \dots; \cos nx; \dots\}$$

не полна.

Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-l, l]$, $l > 0$ и $f(l) = f(-l)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(A_k \cos\frac{\pi k x}{l} + B_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right)$$

такой, что при всех $x \in [-l, l]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$. При этом, если $f(x)$ четна, то $T(x)$ можно выбрать в виде

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos\frac{\pi k x}{l},$$

а если нечетна, то в виде

$$T(x) = \sum_{k=1}^{N} B_k \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

В этой теореме следует положить $l = \pi$ и получим первую часть задачи.

Для второй части задачи положим $x(t) = \sin t$. Функция эта нечетная и поэтому по косинусам разложена быть не может.

19.116.2. В подпространстве пространства $C[0, \pi/2]$ функций, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, система $\{\sin x\,; \sin 3x\,; \dots; \sin(2n+1)x\,; \dots\}$ полна.

Продолжим функцию на $[-\pi, \pi]$: $f(\pi - x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$. Тогда $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right)\Bigg|_{y=\pi-x} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - y)\sin k(\pi - y)\,d(-y)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx - (-1)^k\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin ky\,dy\right) = \frac{2}{\pi}\left[1 - (-1)^k\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx.$$

$$b_{2n} = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2n+1}\sin(2n+1)x.$$

Значит по теореме Фейера $f(x)$ разлагается по синусам нечетных дуг и система нечетных дуг синусов полна в пространстве $C[0, \pi/2]$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$.

Т 5. Полна ли система функций $\{x, x^3, \dots, x^{2n+1}, \dots\}$ в пространстве а) $C([1,2])$, б) $C([0,1])$.

а) Берем функцию из $C([1,2])$ и непрерывно продолжаем ее на отрезок $[-2, 1]$ так, чтобы она была нечетной на $[-2, 2]$. Мы можем приблизить ее суммами Фейера, содержащими только синусы в

$C([-2, 2])$. Каждый из синусов представляем конечной суммой степенного ряда, содержащей лишь нечетные степени x. Это возможно в силу того, что радиус сходимости степенного ряда синуса равен бесконечности. Таким образом мы строим многочлен, состоящий из нечетных степеней x, приближающий нашу функцию в $C([1, 2])$. Это значит, что наша система полна в $C([1, 2])$.

б) Система нечетных степеней x не будет полной в $C([0, 1])$, ибо функцию $f = 1$ нельзя приблизить нечетными степенями, так как любой многочлен, составленный из них при $x = 0$ обращается в нуль.

Второе задание

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

13.2.5. Найдем предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\pi} f(x,\alpha)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\pi} x\cos(1+\alpha)x\,dx.$$

Функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $\{(x,\alpha)|0\le x\le\pi, -1\le\alpha\le 1\}$, поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\pi} f(x,\alpha)dx = \int_0^{\pi}\lim_{\alpha\to 0} x\cos(1+\alpha)x\,dx = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = \boxed{-2}.$$

13.14.2. Найдем $\Phi'(\alpha)$, если

$$\Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx.$$

Функции $f(x,\alpha)=\frac{\sin\alpha x}{x}$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\cos\alpha x$ непрерывны на всей плоскости, кроме прямой $x=0$, а функции $\varphi(\alpha)=\alpha$ и $\psi(\alpha)=2\alpha$ дифференцируемы на этом множестве, а также значения функций φ,ψ принадлежат этому множеству при $\alpha\ne 0$, поэтому

$$\Phi'(\alpha) = 2\frac{\sin 2\alpha^2}{2\alpha} - \frac{\sin\alpha^2}{\alpha} + \int_{\alpha}^{2\alpha}\cos\alpha x\,dx = \frac{\sin 2\alpha^2}{\alpha} - \frac{\sin\alpha^2}{\alpha} + \frac{\sin 2\alpha^2 - \sin\alpha^2}{\alpha} = \boxed{\frac{2}{\alpha}(\sin 2\alpha^2 - \sin\alpha^2)}.$$

13.17. Вычислим интеграл ($\alpha > 0$):

$$J(\alpha) = \int_0^{b}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Функции $f(x,\alpha)=\frac{1}{x^2+\alpha^2}$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = -\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$ непрерывны на $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$, поэтому

$$I(\alpha) = \int_0^{b}\frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{b}{\alpha}}\frac{d\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}$$

$$I'(\alpha) = \int_0^{b} -\frac{2\alpha dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha J(\alpha)$$

$$J(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}\right)'_{\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{b}{b^2+\alpha^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\cdot\frac{b}{b^2+\alpha^2}}.$$

15.1.3. Применяя формулу Фруллани, вычислим интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx = |x^2=t| = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{2t}dt = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}}.$$

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

14.1.1. Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E = [\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 1$:

$$I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Поскольку $\left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ и интеграл $I(\alpha_0)$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $I(\alpha)$ сходится на $[\alpha_0, +\infty)$.

Покажем, что при $E = (1, +\infty)$ интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно по α на E. Действительно, положим $\eta_n = 2^n$, $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$, тогда

$$\int\limits_{\eta_n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_n}} = \frac{\eta_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n} = -\frac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$

и, следовательно

$$\sup_{\alpha\in E}\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\right| \nrightarrow 0.$$

14.1.2. Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E = (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Поскольку $\left|\frac{1}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ и интеграл $I(\alpha_0)$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $I(\alpha)$ сходится на $(0, \alpha_0)$.

Покажем, что при $E = (0, 1)$ интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно по α на E. Действительно, положим $\eta_n = \frac{1}{2^n}$, $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогда

$$\int\limits_0^{\eta_n} \frac{dx}{x^{\alpha_n}} = \frac{\eta_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n} = \frac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

и, следовательно

$$\sup_{\alpha\in E}\left|\int\limits_0^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha}\right| \nrightarrow 0.$$

14.6.3. Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E_1 = (-\infty, 0]$ и сходится неравномерно на множестве $E_2 = [0, +\infty)$:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x-\alpha)^6}.$$

Поскольку $0 \leq I(\alpha) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^6}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^6}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $I(\alpha)$ сходится на E_1.

При $\alpha \in E_2$ положим $\alpha_n = \eta_n = 2^n$. Тогда

$$\int\limits_{\eta_n}^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x-\alpha_n)^6} = \int\limits_{\eta_n - \alpha_n}^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{4+t^6} > 0.$$

Значит,

$$\sup_{\alpha \in E_2} \left| \int_{\eta_n}^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x - \alpha_n)^6} \right| \nrightarrow 0.$$

14.6.4. Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E_1 = [0, 2]$ и сходится неравномерно на множестве $E_2 = [0, +\infty)$:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx.$$

На E_1 имеем $0 < e^{-(x-\alpha)^2} \leq e^{-(x-2)^2+4}$, поскольку $(x - \alpha)^2 - (x - 2)^2 + 4 = 2x(2 - \alpha) + \alpha^2 \geq 0$, а также

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-2)^2+4} dx = e^4 \int_2^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

сходится, следовательно $I(\alpha)$ тоже сходится по признаку Вейерштрасса. Для E_2 положим $\eta_n = \alpha_n = 2^n$, тогда

$$\int_{\eta_n}^{+\infty} e^{-(x-\alpha_n)^2} dx = \int_{\eta_n - \alpha_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0,$$

а значит при $\eta \to +\infty$

$$\sup_{\alpha \in E_2} \int_\eta^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \nrightarrow 0.$$

14.7.3. Исследуем интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E = (0, +\infty)$:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Положим $\alpha_n = 1/\eta_n$, $\eta_n = 2^n$, тогда

$$\int_{\eta_n}^{+\infty} \sqrt{\alpha_n} e^{-\alpha_n x^2} dx = \int_{\alpha_n \eta_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0,$$

а значит при $\eta \to +\infty$

$$\sup_{\alpha \in E} \int_\eta^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \nrightarrow 0$$

и $I(\alpha)$ сходится неравномерно.

14.7.5. Исследуем интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E = \mathbb{R}$:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin\alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx.$$

Положим $\alpha_n = 1/\eta_n$, $\eta_n = 2^n$, тогда

$$I(\alpha_n, \eta_n) = \int_{\eta_n}^{+\infty} \sin\alpha_n \, e^{-\alpha_n^2(1+x^2)} dx = \frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2} \int_{\eta_n}^{+\infty} e^{-\alpha_n^2 x^2} dx = \frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2} \int_{\alpha_n \eta_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt \to \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0.$$

Значит $\sup\limits_{\alpha\in E} I(\alpha,\eta) \nrightarrow 0$ при $\eta \to +\infty$ и интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно.

14.7.6. Исследуем интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E = (0,2)$:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Заменим $t = 1/x$:

$$I(\alpha) = -\int\limits_{+\infty}^{1} \sin t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)t^\alpha dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt.$$

Положим $\xi_n' = 2\pi n$, $\xi_n'' = 2\pi n + \pi$, $\alpha_n = 2 - \log_{2\pi n+\pi} 2$, тогда

$$\int\limits_{\xi_n'}^{\xi_n''} \frac{\sin x}{x^{2-\alpha_n}}dx = \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^{2-\alpha_n}}dx \geq \frac{1}{(2\pi n+\pi)^{2-\alpha_n}}\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = 1,$$

а значит по критерию Коши $I(\alpha)$ сходится неравномерно.

14.8.2. Исследуем интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E = [0,1]$:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx.$$

Имеем $\left|\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{|x-\alpha|}}$, также

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = \int\limits_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} + \int\limits_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}}$$

сходится, следовательно, по признаку Вейерштрасса $I(\alpha)$ сходится равномерно.

Т 1. Вычислим интеграл Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx.$$

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx, \qquad \beta > 0.$$

При фиксированном $\beta > 0$ функция $e^{-\beta x}/x$ убывает на промежутке $(0,+\infty)$, функция $\sin\alpha x$ при $\alpha \neq 0$ имеет ограниченную первообразную. Следовательно, интеграл $\Phi(\alpha,\beta)$ сходится при $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле. При $\alpha = 0$ интеграл $\Phi(\alpha,\beta) = 0$. Также, интеграл

$$K(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx,$$

полученный дифференцированием подынтегральной функции интеграла $\Phi(\alpha,\beta)$ по α, сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса. Значит, можно применить правило Лейбница. Получаем

$$\Phi'_\alpha(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Интегрируя обратно на отрезке $[0,\alpha]$ получаем формулу

$$\Phi(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл $\Phi(\alpha,\beta)$ сходится равномерно по β на отрезке $[0,1]$ по признаку Дирихле, поскольку функция $\sin\alpha x$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(x,\beta) = e^{-\beta x}/x$ монотонно убывает и $g(x,\beta) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на отрезке $[0,1]$. Отсюда и из непрерывности функции $e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ на множестве $\{(x,\beta): 0 \le x < +\infty, 0 \le \beta \le 1\}$ следует непрерывность по β функции $\Phi(\alpha,\beta)$. Значит,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \lim_{\beta\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \lim_{\beta\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{\sin\alpha x}{x}$ — нечетная по α функция, получаем

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx, \qquad K(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$$

Пусть $\alpha > 0$. Так как функция $\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}$ непрерывна при любых α и x, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right)dx = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$$

сходится равномерно по α на $[\alpha_0,+\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то применяя правило Лейбница получаем

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$$

Складывая это равенство с равенством

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx,$$

где $\alpha > 0$, находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x} - \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\right)dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx.$$

Дифференцируя полученное равенство почленно, имеем

$$I''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общее решение которого имеет вид $I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$. Заметим, что

$$|I(\alpha)| \le I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, $e^{-\alpha} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, а $e^{\alpha} \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$. Отсюда следует, что $C_1 = 0$, т.е. $I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$. Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, получаем $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$. Так как $I(\alpha)$ четная функция, то

$$\boxed{I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

Выше мы получили, что $I'(\alpha) = -K(\alpha)$, а значит $K(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$, откуда в силу нечетности $K(\alpha)$ следует, что

$$\boxed{K(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \, e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

15.1.4. При $a > 0$, $b > 0$ применяя формулу Фруллани вычислим интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx.$$

Заменим $x = e^{-t}$:

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{-t} \cdot (-e^{-t}) dt = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+1)t} - e^{-(b+1)t}}{t} dt = -\ln \frac{b+1}{a+1} = \boxed{\ln \frac{a+1}{b+1}}.$$

15.2.4. Используя интеграл Дирихле, вычислим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ x = t^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

15.3.2. Используя интеграл Дирихле, вычислим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,(1 + \cos 2x)}{2x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \sin x \cos 2x}{2x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \frac{\sin 3x - \sin x}{2}}{2x} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

15.5.2. Используя интеграл Дирихле или интеграл Фруллани вычислим при $\alpha > 0$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x - \sin \alpha x}{x^2} dx = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{x} dx = \boxed{\alpha \ln \alpha}.$$

15.6.1. С помощью дифференцирования по параметру вычислим интеграл при $\beta > 0$:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx.$$

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = -\int_0^{+\infty} (1 - \cos \alpha x) e^{-\beta x} dx = -\int_0^{+\infty} \left(e^{-\beta x} - e^{-\beta x} \cos \alpha x \right) dx = -\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$I(\alpha,\beta) = -\ln|\beta| + \frac{1}{2}\ln|\alpha^2+\beta^2| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C$$

$$I(0,\beta) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}.$$

15.6.4. С помощью дифференцирования по параметру вычислим интеграл при $\alpha > 0, \beta > 0$:

$$I(\alpha,\beta,\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos\lambda x \, dx.$$

$$I'_\lambda(\alpha,\beta,\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right) \sin\lambda x \, dx = -\frac{\lambda}{\alpha^2+\lambda^2} + \frac{\lambda}{\beta^2+\lambda^2}$$

$$I(\alpha,\beta,\lambda) = -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\lambda^2) + \frac{1}{2}\ln(\beta^2+\lambda^2) + C$$

$$I(0+,0+,\lambda) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{I(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}}.$$

15.6.5. С помощью дифференцирования по параметру вычислим интеграл:

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Заменим $x = 1/t$:

$$I(\alpha) = \int\limits_{+\infty}^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{t}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{t}}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

$$I'_\alpha = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{t^2+\alpha^2}}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}(t^2+\alpha^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du^2}{u(u^2+\alpha^2+1)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+\alpha^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi}{2}\ln\left|\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right| + C$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow \boxed{I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln\left|\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right|}.$$

15.13.4. Используя интеграл Эйлера-Пуассона, докажем, что при $\alpha > 0$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch}\beta x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} dx\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

16.7.4. Используя эйлеровы интегралы, вычислим интеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}} = |x=2t| = \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}(1-t)^{-\frac{2}{5}}dt = \int_0^1 t^{\frac{2}{5}-1}(1-t)^{1-\frac{3}{5}}dt = \mathrm{B}\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}{\Gamma(1)} = \boxed{\frac{\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}}.$$

16.9.3. Используя эйлеровы интегралы, вычислим интеграл

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = |x=at| = \int_0^1 a^2t^2\cdot a\cdot a\sqrt{1-t^2}dt = a^4\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt = a^4\int_0^1 u\sqrt{1-u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}du =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}-1}(1-u)^{\frac{3}{2}-1}du = \frac{a^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \boxed{\frac{\pi a^4}{16}}.$$

16.12.9. Используя эйлеровы интегралы, вычислим интеграл, $0<\alpha<1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{2\alpha-1}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\alpha-1}x}{\cos^{2\alpha-1}x}dx = |\sin x = t| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^{2\alpha-1}}{\sqrt{1-t^2}^{2\alpha-1}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{t^{2\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha}}dt = |t^2=u| =$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}du = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(2)} = \boxed{\frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}}.$$

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

12.248. Найдем интеграл в смысле главного значения:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\sin x\,dx=\lim_{a\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=\boxed{0}.$$

12.254. Найдем интеграл в смысле главного значения:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\boxed{0}.$$

17.2.4. Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & |x|\le 2\pi n\\ 0, & |x|>2\pi n\end{cases},\qquad n\in\mathbb{N},\qquad \omega>0.$$

f — нечетная, следовательно

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}\sin\omega t\sin yt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}\frac{\cos(\omega-y)t-\cos(\omega+y)t}{2}dt=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega-y)t}{\omega-y}-\frac{\sin(\omega+y)t}{\omega+y}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(2\pi n-\frac{2\pi ny}{\omega}\right)}{\omega-y}-\frac{\sin\left(2\pi n+\frac{2\pi ny}{\omega}\right)}{\omega+y}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin\frac{2\pi ny}{\omega}}{\omega-y}-\frac{\sin\frac{2\pi ny}{\omega}}{\omega+y}\right)=\frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi ny}{\omega}}{y^2-\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(y)\sin xy\,dy=\boxed{\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi ny}{\omega}}{y^2-\omega^2}\sin xy\,dy}.$$

17.5.2. Представим интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty,0)$:

$$f(x)=\begin{cases}2-3x, & 0\le x<2/3\\ 0, & x>2/3\end{cases}.$$

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2}{3}}(2-3t)\sin yt\,dt=\frac{2}{\pi}\left(2\int_0^{\frac{2}{3}}\sin yt\,dt-3\int_0^{\frac{2}{3}}t\sin yt\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(2\left(-\frac{\cos yt}{y}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}}-3\left(-\frac{1}{y}\right)\left(t\cos yt-\frac{\sin yt}{y}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{\pi}\left(2\left(-\frac{\cos\frac{2}{3}y}{y}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}\left(\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}y-\frac{\sin\frac{2}{3}y}{y}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{y^2}\sin\frac{2}{3}y\right)=\frac{2}{\pi y^2}\left(2y-3\sin\frac{2}{3}y\right)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2y-3\sin 2y/3}{y^2}\sin xy\,dy}.$$

17.6.1. Представим интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее четным образом на интервал $(-\infty,0)$:

$$f(x)=e^{-\alpha x},\qquad x\ge 0,\qquad \alpha>0.$$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos yt\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\alpha^2+y^2}\,dy}.$$

17.7.4. Найдем преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}.$$

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-iyt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t\,e^{-iyt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it(1-y)}-e^{it(-1-y)}}{2i}dt=$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{it(1-y)}}{i(1-y)}+\frac{e^{it(-1-y)}}{i(1+y)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\pi}\cdot e^{-i\pi y}}{1-y}+\frac{e^{-i\pi}\cdot e^{-i\pi y}}{1+y}-\frac{e^{-i\pi}\cdot e^{i\pi y}}{1-y}-\frac{e^{i\pi}\cdot e^{i\pi y}}{1+y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi y}}{1-y}+\frac{e^{-i\pi y}}{1+y}-\frac{e^{i\pi y}}{1-y}-\frac{e^{i\pi y}}{1+y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi y}}{1-y^2}-\frac{e^{i\pi y}}{1-y^2}\right)=\boxed{-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\pi y}{1-y^2}}.$$

IV. Обобщенные функции.

21.60. В пространстве D' имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos nx = 0$, поскольку по теореме Римана об осцилляции $\forall\varphi \in D$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos nx\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Аналогично $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin nx = 0$ в D'.

Т 2. Докажем, что в D' справедливо

а) $\lim\limits_{a\to0+} \frac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$. Имеем, что $\forall\varphi \in D$

$$\left(\lim_{a\to0+} \frac{a}{a^2+x^2}, \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a\to0+} \frac{a}{a^2+x^2}\cdot\varphi(x)dx = \lim_{a\to0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to0+}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a}{a^2+x^2}\varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}\varphi(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{a\to0+}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx\right) =$$

$$= -\lim_{a\to0+}\left(\int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx\right) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \lim_{a\to0+} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \lim_{a\to0+} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi'(x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\big(\varphi(0) - \varphi(-\infty)\big) - \frac{\pi}{2}\big(\varphi(+\infty) - \varphi(0)\big) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi).$$

б) $\lim\limits_{a\to0+} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\alpha} = \pi\delta(x)$.

21.71. Вычислим производную обобщенной функции

$$y = \theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \ge x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}.$$

$$\big(\theta'(x - x_0), \varphi(x)\big) = -\big(\theta(x - x_0), \varphi'(x)\big) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x - x_0)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{x_0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(x_0) = \big(\delta(x - x_0), \varphi(x)\big).$$

Т 3. Из Т 2 имеем, что в D'

$$\lim_{\xi\to0+} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{\xi\to0+} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{x^2+\xi^2}\right) = \boxed{-\frac{\pi\delta'(x)}{2}}.$$

Т 4. Упростим выражения:

а) $\big(e^{\sin x} + x\cos x\big)\delta(x)$;

$$\Big(\big(e^{\sin x} + x\cos x\big)\delta(x), \varphi(x)\Big) = \big(\delta, \big(e^{\sin x} + x\cos x\big)\varphi\big) = \big(e^{\sin 0} + 0\cos 0\big)\varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

б) $\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\delta'(x)$;

$$\left(\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\delta'(x), \varphi(x)\right) = \left(\delta', \left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\varphi\right) =$$

$$= -\left(\delta, \left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\varphi' + \left(\frac{\cos x\,(1+x^2) - 2x\sin x}{(1+x^2)^2} - \operatorname{sh} x\right)\varphi\right) =$$

$$= -\big(\varphi(0) + \varphi(0)\big) = \varphi'(0) - \varphi(0) = (\delta, \varphi' - \varphi) = (\delta, \varphi') - (\delta, \varphi) = -(\delta', \varphi) - (\delta, \varphi) = (-\delta' - \delta, \varphi).$$

в) $e^{x^2}\delta''(x)$;

$$\big(e^{x^2}\delta'', \varphi\big) = \big(\delta'', e^{x^2}\varphi\big) = -(\delta', 2xe^{x}\varphi + e^{x}\varphi') = \big(\delta, 2e^{x^2}\varphi + 4x^2e^{x^2}\varphi + 2xe^{x^2}\varphi' + 2xe^{x^2}\varphi' + e^{x^2}\varphi''\big) =$$

$$= 2\varphi(0) + \varphi''(0) = (\delta, 2\varphi + \varphi'') = (2\delta, \varphi) + (\delta, \varphi'') = (2\delta, \varphi) - (\delta', \varphi') =$$

$$= (2\delta, \varphi) + (\delta'', \varphi) = (2\delta + \delta'', \varphi).$$