10.1.5. Вычислим криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$$

по отрезку Γ с концами $(0,0)$ и $(1,2)$.

$$\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}dx = \int\limits_0^1 \frac{d\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)}{\sqrt{\frac{5t^2}{4}+1}} = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{1+\frac{5}{4}t^2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \boxed{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

10.17. Вычислим криволинейный интеграл

$$I = \int_\Gamma x^2 ds$$

по окружности Γ, заданной уравнениями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. Понятно, что

$$I = \int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \int_\Gamma z^2 ds \Rightarrow I = \int_\Gamma \frac{x^2+y^2+z^2}{3} ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds.$$

Выразим y и z через x, принимая его за параметром (имеем ввиду, что $3x^2 \le 2a^2$):

$$x^2+y^2+(x+y)^2 = a^2 \Leftrightarrow (2y+x)^2+3x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{2a^2-3x^2}}{2}.$$

Аналогично

$$z = \frac{-x \mp \sqrt{2a^2-3x^2}}{2}.$$

Значит

$$I = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma \sqrt{1+{y'}^2+{z'}^2}dx = \frac{a^2}{3}\cdot 2 \int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{3}}a}^{\sqrt{\frac{2}{3}}a} \sqrt{1+\frac{1}{2}+\frac{9x^2}{2(2a^2-3x^2)}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}a^2 \int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{3}}a}^{\sqrt{\frac{2}{3}}a} \sqrt{\frac{6a^2}{2(2a^2-3x^2)}}dx = \frac{2}{3}a^3 \cdot \int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{3}}a}^{\sqrt{\frac{2}{3}}a} \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}a}\right)}{\sqrt{1-\frac{3x^2}{2a^2}}} = \frac{2}{3}a^3\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3}a^3 \arcsin t\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\pi a^3}.$$

10.9. Вычислим криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds$$

по астроиде Г: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Заменим $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$, тогда $x'_\varphi = -a\cos^2\varphi\sin\varphi$, $y'_\varphi = a\sin^2\varphi\cos\varphi$ и

$$\int_\Gamma \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\sqrt{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}dt =$$

$$= 4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\cdot 3a\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin^2 2\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi = 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2}\right)\sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d2\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\sin 2\varphi\, d\varphi\right) = 3a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6\varphi - \sin 2\varphi}{2}\, d\varphi\right)$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 6\varphi\, d6\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d2\varphi\right)\right] = 3a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{6} - \frac{2}{2}\right)\right) = \boxed{4a^{\frac{7}{3}}}.$$

10.82.1. Вычислим длину дуги кривой Г, заданной уравнениями

$$x = 3t,\quad y = 3t^2,\quad z = 2t^3,\quad 0 \le t \le 1:$$

$$\int_0^1 \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}dt = 3\int_0^1 (1 + 2t^2)dt = 3\left(t + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \boxed{5}.$$

10.31. Найдем криволинейный интеграл по винтовой линии Г: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$:

$$\int_\Gamma ydx + zdy + xdz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [a\sin t\,(-a\sin t) + bt(a\cos t) + a\cos t\,(b)]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t]dt =$$

$$= -a^2\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{4}d2t + ab\int_0^{2\pi} td\sin t + ab\int_0^{2\pi} d\sin t =$$

$$= -\frac{a^2}{4}(2t - \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} + ab\left(t\sin t|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t\,dt\right) + ab\sin t|_0^{2\pi} =$$

$$= \boxed{-\pi a^2}.$$

10.45.1. Вычислим криволинейный интеграл по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ применяя формулу Грина:

$$\int_\Gamma (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \int_G (y + 1 - x - 1)d(x, y) =$$

$$= \int_G (y - x)d(x, y) = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} (y - x)dy =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{y^2}{2} - xy\right) dx \Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int\limits_{-a}^{a} -2bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,d(a^2 - x^2) = -\frac{1}{2a}\cdot\frac{2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-a}^{a} = \boxed{0}.$$

10.60. Вычислим интеграл

$$I = \int_\Gamma (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$$

по кривой с началом $A(-2, -1)$ и концом $B(0, 3)$. Сначала проверим, что подынтегральная функция является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$u = \int (x^4 + 4xy^3)dx = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + \varphi(y)$$

$$6x^2y^2 + \varphi'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \qquad \varphi(y) = -y^5 + C$$

$$u(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C$$

$$I = \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C\right)\Bigg|_A^B = -243 - \left(-\frac{32}{5} - 8 + 1\right) = \boxed{-\frac{1148}{5}}.$$

10.104.2. Вычислим площадь области, ограниченной петлей кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin 2\varphi,\ x \geq 0$. Понятно, что $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $y = \pm x\sqrt{1 - x^2/a^2}$, то кривая симметрична относительно оси абсцисс и искомая площадь равна

$$S=\int_0^a dx\int_{-2x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{2x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy=\int_0^a 4x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=2\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx^2=-2a^2\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,d\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=$$

$$=-2a^2\cdot\left.\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a=\boxed{\frac{4}{3}a^2}.$$

T1. Вычислим криволинейный интеграл $I=\int_\gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ по простой замкнутой гладкой кривой γ, не проходящей через $(0,0)$. Пусть γ является границей области G. Рассмотрим два случая:

Случай 1: $(0,0)\notin G$. По формуле Грина имеем

$$I=\int_\gamma Pdx+Qdy=\iint_G\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dxdy=\boxed{0},$$

где

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Случай 2: $(0,0)\in G$. Вырежем кружочек C из G с центром в $(0,0)$ и достаточно малым радиусом ρ. Тогда область $G\backslash C$ не содержит $(0,0)$ и, следовательно, по результату предыдущего случая получаем

$$0=\iint_{G\backslash C}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial(G\backslash C)}Pdx+Qdy=\int_{\gamma\sqcup\partial C^-}Pdx+Qdy.$$

Отсюда

$$I=\int_{\partial C}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2}d\varphi=\boxed{2\pi}.$$

T2. Вычислим площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=c$, $z=c+h$ (обе плоскости пересекают сферу). Перейдем к цилиндрическим координатам: $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $z=z$,

$$E=R^2,\quad G=1,\quad F=0$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_c^{c+h}Rdz=\boxed{2\pi Rh}.$$

11.3.1. Вычислим интеграл

$$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)dS$$

по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ заменой $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, $z = \sin\psi$:

$$E = {x'_\varphi}^2 + {y'_\varphi}^2 + {z'_\varphi}^2 = R^2\cos^2\psi$$

$$G = {x'_\psi}^2 + {y'_\psi}^2 + {z'_\psi}^2 = R^2$$

$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = R^2(\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi) = 0$$

$$I = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}d\psi = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\psi\,d\psi = R^4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi = \boxed{4\pi R^4}.$$

11.7.1. Вычислим поверхностный интеграл

$$I = \iint_S (xy + yz + zx)dS$$

по частью S конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$:

$$I = \iint_S \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}dy =$$

$$= \left|\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)rdr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)\right)dr^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\cdot 16\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,d\cos\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\cos\varphi\right) =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\sin\varphi = 8\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)d\sin\varphi = 8\sqrt{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \boxed{\frac{64\sqrt{2}}{15}}.$$

11.11. Вычислим поверхностный интеграл

$$I = \iint_S z dS$$

по поверхности S: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$. Имеем

$$\iint_S z dS = \iint_S v\sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где $E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$, $G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = \cos v\,(-u\sin v) + \sin v\,(u\cos v) = 0$, значит

$$I = \iint_S v\sqrt{1+u^2} du dv = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2} dv = 2\pi^2 \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = 2\pi^2 \int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} \operatorname{ch} t\, d(\operatorname{sh} t) =$$

$$= 2\pi^2 \int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} \operatorname{ch}^2 t\, dt = 2\pi^2 \int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} dt = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right)\Bigg|_0^{\ln(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left(3 + 2\sqrt{2} - \left(3 - 2\sqrt{2}\right) + 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) = \boxed{\pi^2\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}.$$

11.38. Вычислим поверхностный интеграл

$$I = \iint_S (2x^2 + y^2 + z^2) dy dz$$

по внешней стороне боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2+z^2} \le x \le H$. Поскольку нормаль к поверхности составляет тупой угол с осью аппликат, то

$$I = -\iint_{y^2+z^2 \le H^2} 3(y^2+z^2) dy dz = \begin{vmatrix} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{vmatrix} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H 3r^2 \cdot r dr = \boxed{-\frac{3}{2}\pi H^4}.$$

11.42. Вычислим интеграл

$$I = \iint_S x^6 dy dz + y^4 dz dx + z^2 dx dy$$

по нижней стороне части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$. Сначала заметим, что

$$\iint_S x^6 dy dz = 0.$$

Действительно, вычислим этот интеграл разбив его на части с $x \le 0$ и $x \ge 0$. Тогда

$$\iint\limits_{\substack{S\\x\geq 0}} x^6dydz = -\iint\limits_{\substack{S\\x\leq 0}} x^6dydz$$

из-за того, что при $x \geq 0$ нормаль к поверхности составляет острый угол с осью x, а при $x \leq 0$ – тупой. Аналогично

$$\iint\limits_S y^4dzdx = 0.$$

Значит, поскольку нормаль к поверхности составляет тупой угол с осью аппликат получаем

$$I = \iint\limits_S z^2dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^4\sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi}\,dr = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^5dr = -\frac{2\pi}{6} = \boxed{-\frac{\pi}{3}}.$$

11.45.3. Вычислим поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_S zdxdy + (5x + y)dydz,$$

где S внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$. По формуле Гаусса-Остроградского

$$I = \iiint\limits_\Delta (1+5)dxdydz = 6V = 6\cdot\frac{4}{3}\pi(2^3 - 1) = \boxed{56\pi}.$$

Здесь V – объем области Δ, ограниченной S.

11.47.1. Вычислим поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

где S внешняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$I = \iiint\limits_T (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dxdydz = 3\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)dz =$$

$$= 3\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \left((x^2 + y^2)(a - x - y) + \frac{(a - x - y)^3}{3}\right)dy =$$

$$= 3\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \left(x^2(a - x) - x^2y + (a - x)y^2 - y^3 + \frac{(a - x)^3 - 3(a - x)^2y + 3(a - x)y^2 - y^3}{3}\right)dy =$$

$$= 3\int\limits_0^a \Bigg(x^2(a - x)^2 - \frac{x^2(a - x)^2}{2} + \frac{(a - x)^4}{3} - \frac{(a - x)^4}{4}$$

$$+ \frac{(a - x)^4 - \frac{3(a - x)^4}{2} + (a - x)^4 - \frac{(a - x)^4}{4}}{3}\Bigg)dx =$$

$$= 3\int_0^a (a-x)^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(a-x)^2}{6}\right)dx = 3\int_0^a \frac{(a^2-2ax+x^2)(a^2-2ax+4x^2)}{6}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (a^4-4a^3x+9a^2x^2-10ax^3+4x^4)dx = \frac{1}{2}\left(a^5-2a^5+3a^5-\frac{5}{2}a^5+\frac{4}{5}a^5\right) = \boxed{\frac{3a^5}{20}}.$$

Здесь T – тетраэдр, ограниченная S.

11.52.2. Вычислим интеграл

$$I = \iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

где S верхняя сторона части поверхности параболоида $x^2+y^2+2az=a^2$, $z \geq 0$. В терминах цилиндрических координат S: $r^2+2az=a^2$, $z \geq 0$. Пусть П – внутренность описанной области, тогда

$$I = \iiint_{\Pi}(2x+2y+2z)dxdydz = 2\iiint_{\Pi'}(r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} dz \int_0^{\sqrt{a^2-2az}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)rdr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{3}(a^2-2az)^{\frac{3}{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi) + \frac{z(a^2-2az)}{2}\right)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} z(a^2-2az)dz = 2\pi\left(\frac{a^4}{8}-\frac{a^4}{12}\right) = \boxed{\frac{\pi a^4}{12}}.$$

11.52.3. Вычислим предыдущий интеграл I, только поменяв S на нижнюю сторону части конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z\leq H$. Снова перейдем к цилиндрическим координатам: $S: r=z$, $0<z\leq H$. Пусть G – внутренность этой части конуса, тогда

$$I = -2\iiint_G (x+y+z)dxdydz = -2\iiint_{G'}(r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^z (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)r\,dr = -2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^z zr\,dr = -4\pi\int_0^H \frac{z^3}{2}dz = \boxed{-\frac{\pi H^4}{2}}.$$

11.63.1. Вычислим следующий интеграл по формуле Стокса, где L окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$:

$$I = \int_L ydx + zdy + xdz =$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (-1-1-1)dS = \boxed{-\sqrt{3}\pi R^2}.$$

11.65.2. Вычислим интеграл

$$I = \int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

где L – эллипс $x^2 + y^2 = a^2$, $x/a + z/c = 1$, $a > 0$, $c > 0$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(1, 0, 0)$.

$$I = -\iint_S \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS = -\iint_S \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}(-1-1) + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}(-1-1) \right) dS =$$

$$= \frac{2(a+c)}{\sqrt{a^2+c^2}} \pi a \sqrt{a^2+c^2} = \boxed{2\pi a(a+c)}.$$

В предпоследнем переходе мы воспользовались формулой для площади эллипса с полуосями a и $\sqrt{a^2+c^2}$.

3.44.2. Найдем производную функции $f = \operatorname{arctg}(y/x)$ в точке $M\left(1/2; \sqrt{3}/2\right)$ по направлению внешней нормали к окружности $x^2 + y^2 = 2x$. Заметим, что M лежит на окружности. Также центр O окружности имеет координаты $(1; 0)$. Значит единичный вектор направления производной будет

$$\mathbf{l} = \frac{\overline{OM}}{OM} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_M = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\right|_M = \left.\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|_M = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

3.48.3. Найдем наибольшее значение производной $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ в точке $M(1, -2, -3)$, если $f = \ln xyz$. Пусть $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_M = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right|_M = \left.\frac{\cos\alpha}{x} + \frac{\cos\beta}{y} + \frac{\cos\gamma}{z}\right|_M = \cos\alpha - \frac{\cos\beta}{2} - \frac{\cos\gamma}{3}.$$

Функцией Лагранжа будет

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \cos\alpha - \frac{\cos\beta}{2} - \frac{\cos\gamma}{3} + \lambda(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1).$$

Нужно решить следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = L'_\alpha = -\sin\alpha - 2\lambda\cos\alpha\sin\alpha = -\sin\alpha\,(1 + 2\lambda\cos\alpha) \\ 0 = L'_\beta = \dfrac{\sin\beta}{2} - 2\lambda\cos\beta\sin\beta = \dfrac{\sin\beta}{2}(1 - 4\lambda\cos\beta) \\ 0 = L'_\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{3} - 2\lambda\cos\gamma\sin\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{3}(1 - 6\lambda\cos\gamma) \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}.$$

Если $\sin\alpha = 0$, то $\cos^2\alpha = 1$ и $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, но из второго и третьего уравнений $\sin\beta = \sin\gamma = 0$, что невозможно. Значит $\sin\alpha \neq 0$. Аналогично $\sin\beta \neq 0 \neq \sin\gamma$. Значит $\cos\alpha = -\frac{1}{2\lambda}$, $\cos\beta = \frac{1}{4\lambda}$, $\cos\gamma = \frac{1}{6\lambda}$. Отсюда

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^2} + \frac{1}{36\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{7}{12}, l = \pm\left(-\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right).$$

Имеем

$$\begin{cases} L''_{\alpha\alpha} = -\cos\alpha - 2\lambda(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ L''_{\beta\beta} = \dfrac{\cos\beta}{2} - 2\lambda(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \\ L''_{\gamma\gamma} = \dfrac{\cos\gamma}{3} - 2\lambda(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) \\ L''_{\alpha\beta} = L''_{\beta\gamma} = L''_{\gamma\alpha} = 0 \end{cases}.$$

Значит второй дифференциал функции L положительно определен при $\mathbf{l} = \left(-\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$ и отрицательно определен при $\mathbf{l} = \left(\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}; -\frac{2}{7}\right)$. Значит максимум L достигается во втором случае и равен

$$\frac{6}{7} + \frac{3}{7\cdot 2} + \frac{2}{7\cdot 3} = \boxed{\frac{7}{6}}.$$

12.13. Если u – дифференцируемое поле, а $f(t)$ – дифференцируемая функция ($t \in \mathbb{R}$), то

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial}{\partial x}f(u)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}f(u)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}f(u)\mathbf{k} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = f'(u)\operatorname{grad} u.$$

12.19. Если $f(r)$ – дифференцируемая, то

$$\nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial x}f(r)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}f(r)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}f(r)\mathbf{k} = f'(r)\cdot\frac{x}{r}\mathbf{i} + f'(r)\cdot\frac{y}{r}\mathbf{j} + f'(r)\cdot\frac{z}{r}\mathbf{k} = \boxed{f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}}.$$

12.15.1. Если $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ и $r = |\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}, \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y}, \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \boxed{\frac{\mathbf{r}}{r}}.$$

12.15.3. Если $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ и $r = |\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y},\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial x},\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial y},\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},-\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\boxed{-\frac{\mathbf{r}}{r^3}}.$$

12.15.5. Если $\mathbf{a}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{r})=\left(\frac{\partial\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(a_x,a_y,a_z\right)=\boxed{\mathbf{a}}.$$

12.37.2. Если u и $\mathbf{a}$ – дифференцируемые скалярные и векторные поля, то

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a})=\sum_{cyc}\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}=\sum_{cyc}\left(\frac{\partial u}{\partial x}a_x+\frac{\partial a_x}{\partial x}u\right)=(\operatorname{grad}u,\mathbf{a})+u\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Или

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a})=(\nabla,u\mathbf{a})=(\nabla,\check{u}\mathbf{a})+(\nabla,u\check{\mathbf{a}})=(\nabla\check{u},\mathbf{a})+u(\nabla,\check{\mathbf{a}})=(\nabla u,\mathbf{a})+u(\nabla,\mathbf{a})=(\operatorname{grad}u,\mathbf{a})+u\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

12.38.3. Если $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=$$

$$=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\sum_{cyc}\frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\boxed{\frac{2}{r}}.$$

12.39. Вычислим $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\operatorname{div}\left(\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\boxed{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}}.$$

12.40.2. Вычислим $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$:

$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)=\operatorname{div}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+u\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}+u\frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(u\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+u\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)=\boxed{(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)+u\operatorname{div}\operatorname{grad}v}.$$

12.41.4. Если $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}(f(r)\cdot x)=\sum_{cyc}\left(f(r)+x\frac{\partial}{\partial x}f(r)\right)=3f(r)+\sum_{cyc}xf'(r)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=3f(r)+f'(r)\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\boxed{3f(r)+f'(r)r}.$$

12.41.5. Если $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}f(r)=\operatorname{div}\sum_{cyc}\mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right)=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\cdot\frac{x}{r}\right)=$$

$$=\sum_{cyc}\left(\frac{\partial}{\partial x}f'(r)\cdot\frac{x}{r}+f'(r)\cdot\frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)=\frac{1}{r}\sum_{cyc}x\cdot f''(r)\cdot\frac{x}{r}+\frac{2f'(r)}{r}=\boxed{f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}}.$$

12.41.8. Если вектор $\mathbf{c}=const$, $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$, то воспользуясь формулой $\big[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]\big]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ можем написать

$$\operatorname{div}\big[\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{r}]\big]=\operatorname{div}\big(\mathbf{c}(\mathbf{r},\mathbf{r})-\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{c})\big)=\operatorname{div}\mathbf{c}r^2-\operatorname{div}\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{c})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{c}r^2=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}(c_xr^2)=\sum_{cyc}c_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)=\sum_{cyc}c_x\cdot 2x=2(\mathbf{c},\mathbf{r})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{c})=\sum_{cyc}\frac{\partial}{\partial x}\big((\mathbf{r},\mathbf{c})x\big)=\sum_{cyc}\left((\mathbf{r},\mathbf{c})+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(xc_x+yc_y+zc_z\big)\right)=3(\mathbf{r},\mathbf{c})+\sum_{cyc}xc_x=4(\mathbf{r},\mathbf{c})$$

Отсюда ответ: $2(\mathbf{c},\mathbf{r})-4(\mathbf{c},\mathbf{r})=\boxed{-2(\mathbf{c},\mathbf{r})}$.

12.42.1. Решим уравнение $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{r})=0$ при $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ и $r=|\mathbf{r}|$. Из задачи 12.41.4 получаем, что уравнение эквивалентно уравнению

$$3u(r)+ru'(r)=0\Leftrightarrow u(r)=0\vee\frac{u'(r)}{u(r)}=-\frac{3}{r}\Leftrightarrow u(r)=0\vee\ln|u(r)|=-3\ln r+C_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(r)=0\vee u(r)=\frac{C}{r^3},C\neq 0\Leftrightarrow\boxed{u(r)=\frac{C}{r^3},C\in\mathbb{R}}.$$

12.49.4. Если $\boldsymbol{c}=const$, а u и a – дифференцируемые скалярные и векторные поля, то

$$\operatorname{rot}[\mathbf{c},\mathbf{a}]=\big[\nabla,[\mathbf{c},\mathbf{a}]\big]=\big[\nabla,[\check{\mathbf{c}},\mathbf{a}]\big]+\big[\nabla,[\mathbf{c},\check{\mathbf{a}}]\big]=\big[\nabla,[\mathbf{c},\check{\mathbf{a}}]\big]=(\nabla,\check{\mathbf{a}})\mathbf{c}-(\nabla,\mathbf{c})\check{\mathbf{a}}=(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{c},\nabla)\mathbf{a}.$$

12.49.5. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ - дифференцируемые векторные поля, то

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\big[\nabla,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\big]=\big[\nabla,[\check{\mathbf{a}},\mathbf{b}]\big]+\big[\nabla,[\mathbf{a},\check{\mathbf{b}}]\big]=(\nabla,\mathbf{b})\check{\mathbf{a}}-(\nabla,\check{\mathbf{a}})\mathbf{b}+(\nabla,\check{\mathbf{b}})\mathbf{a}-(\nabla,\mathbf{a})\check{\mathbf{b}}=$$

$$=(\mathbf{b},\nabla)\mathbf{a}-(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{b}+(\nabla,\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b}=\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}+(\mathbf{b},\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b}.$$

12.49.6. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ - дифференцируемые векторные поля, то

$$\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = (\nabla,[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = (\nabla,[\check{\mathbf{a}},\mathbf{b}]) + \left(\nabla,\left[\mathbf{a},\check{\mathbf{b}}\right]\right) = (\mathbf{b},[\nabla,\check{\mathbf{a}}]) + \left(\mathbf{a},\left[\check{\mathbf{b}},\nabla\right]\right) =$$

$$= (\mathbf{b},[\nabla,\mathbf{a}]) - (\mathbf{a},[\nabla,\mathbf{b}]) = (\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b}).$$

12.50.4. Если $\mathbf{a} = const$, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ и $r = |\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{a}) = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}u(r)a_z - \frac{\partial}{\partial z}u(r)a_y\right) = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(a_z u'(r)\cdot\frac{y}{r} - a_y u'(r)\cdot\frac{z}{r}\right) =$$

$$= \frac{u'(r)}{r}\sum_{cyc}\mathbf{i}\left(a_z y - a_y z\right) = \frac{u'(r)}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \boxed{\frac{u'(r)}{r}[\mathbf{r},\mathbf{a}]}.$$

12.54.2. Если $\mathbf{c} = const$, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ и $r = |\mathbf{r}|$, то

$$\operatorname{rot}\big[\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{r}]\big] = \operatorname{rot}\mathbf{c}r^2 - \operatorname{rot}\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{c}).$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{c}r^2 = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(c_z r^2) - \frac{\partial}{\partial z}\left(c_y r^2\right)\right) = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(c_z\cdot 2y - c_y\cdot 2z\right) = 2[\mathbf{r},\mathbf{c}]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{r}(\mathbf{r},\mathbf{c}) = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\big(z(\mathbf{r},\mathbf{c})\big) - \frac{\partial}{\partial z}\big(y(\mathbf{r},\mathbf{c})\big)\right) =$$

$$= \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(z\frac{\partial}{\partial y}(c_x x + c_y y + c_z z) - y\frac{\partial}{\partial z}(c_x x + c_y y + c_z z)\right) = \sum_{cyc}\mathbf{i}\left(zc_y - yc_z\right) = [\mathbf{c},\mathbf{r}]$$

Отсюда ответ: $2[\mathbf{r},\mathbf{c}] - [\mathbf{c},\mathbf{r}] = \boxed{3[\mathbf{r},\mathbf{c}]}$.

12.70.3. Найдем поток векторного поля $\mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + x(y^2+z^2)\mathbf{k}$ через полную поверхность S цилиндра G: $y^2 + z^2 \le a^2$, $0 \le x \le a$ по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\iint_S (\mathbf{a},\mathbf{n})dS = \iint_S (y^2x\cos\alpha - yz^2\cos\beta + x(y^2+z^2)\cos\gamma)dS = \iiint_G (-z^2 + 2xz)dxdydz =$$

$$= \begin{vmatrix} x = x \\ y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{vmatrix} = \int_0^a dx\int_0^a dr\int_0^{2\pi}(-r^2\sin^2\varphi + 2rx\sin\varphi)rd\varphi =$$

$$= \int_0^a dx\int_0^a r^2dr\int_0^{2\pi}\left(2x\sin\varphi - r\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \int_0^a dx\int_0^a r^2\left(-\frac{r}{2}\varphi + \frac{r}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}dr =$$

$$= \int_0^a dx\int_0^a r^2(-\pi r)dr = \boxed{-\frac{\pi a^5}{4}}.$$

12.93.1. Вычислим работу поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ от точки $A(a, 0, 0)$ до $B(a, 0, 2\pi b)$ по винтовой линии Γ: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$:

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\Gamma} (ydx + zdy + xdz) = \int\limits_{0}^{2\pi} (y(-a\sin t) + za\cos t + xb)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t)dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-a^2 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} + ab\cos t\right)dt + ab\int\limits_{0}^{2\pi} td\sin t =$$

$$= \left(-\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + ab\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + ab\left(t\sin t|_0^{2\pi} - \int\limits_{0}^{2\pi} \sin t\, dt\right) = \boxed{-\pi a^2}.$$

12.94.4. Найдем по формуле Стокса циркуляцию поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль контура $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ (это окружность радиуса $\sqrt{2}$), ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат:

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (-1-1)dS = -2\pi\sqrt{2}^2 = \boxed{-4\pi}.$$

12.112.1. Покажем, что поле $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$ потенциально и соленоидально. Действительно, оно является градиентом скалярного поля $-1/r$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}, \ldots \Longrightarrow \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Также,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{cyc} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}\right) = \sum_{cyc} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} =$$

$$= \sum_{cyc} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{r^5} = 0.$$

12.115. Найдем дифференцируемую функцию Φ, чтобы поле $\mathbf{a} = \Phi(r)\mathbf{r}$ было соленоидальным. Для этого необходимо и достаточно решить уравнение $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. Но мы уже это сделали в задаче 12.42.1, и, значит, ответ: $\boxed{\Phi(r) = \frac{C}{r^3}, C \in \mathbb{R}}$.