1. …
2. …
3. **Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс.**
   1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — процесс восстановления, построенный по $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

      Решение. Положим $\xi_n = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 2, & 1/2 \end{cases}$. Тогда для $t_1 = 1.5$, $t_2 = 2.5$ имеем
      $$P(X_{t_1} - X_0 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_{t_1} - X_0 = 0), \qquad P(X_{t_2} - X_{t_1}) = \frac{3}{4}, \qquad P(X_{t_2} - X_{t_1}) = \frac{1}{4}.$$
      Тогда $P(X_{t_1} - X_0 = 0, X_{t_2} - X_{t_1} = 0) = 0 \neq \frac{1}{8}$.

   2. Пусть $N^1 = (N_t^1, t \geq 0), \dots, N^k = (N_t^k, t \geq 0)$ — независимые пуассоновские процессы (т.е. независимыми являются порожденные ими σ-алгебры), причем N^i имеет интенсивность λ_i. Докажите, что процесс $N_t = \sum_{i=1}^k N_t^i$ также является пуассоновским, и найдите его интенсивность.

      Решение. Очевидно, $N_t = 0$ п.н., N_t имеет независимые приращения, поскольку $\forall 0 < t_1 < \dots < t_n$ все $N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = \sum_{i=1}^k \left(N_{t_j}^i - N_{t_{j-1}}^i\right)$ независимы, а также
      $$N_t - N_s = \sum_{i=1}^k \left(N_t^i - N_s^i\right) \sim \mathrm{Pois}(\lambda),$$
      где $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i (t - s)$ — интенсивность N_t.

   3. …
   4. …
   5. …
   6. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to +\infty$.

      Решение. Подберем $\xi_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ так, чтобы $N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}$, где $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Тогда $N_t = \sup\left\{n : \frac{S_n}{n} \leq \frac{t}{n}\right\}$. Поскольку по УЗБЧ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\lambda}$, то $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{t}{N_t}$, т.е. $N_t = \lfloor \lambda t \rfloor$ при $n \to \infty$ при $t \to \infty$. А значит $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \lambda$ почти наверное.

   7.
4. **Гауссовские процессы. Винеровский процесс.**
   1. **…**
   2. **…**
   3. Пусть $W_t^1, \dots, W_t^d$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = \left(W_t^1, \dots, W_t^d\right)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^d$.

      Решение. По закону повторного логарифма $P\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t^i}{\sqrt{2t \ln\ln t}}\right) = 1$. Значит $\forall \varepsilon > 0\ \forall T > 0\ \exists t > T$: $\frac{W_t^i}{\sqrt{2t\ln\ln t}} > 1 - \varepsilon$ и некоторый из W_t^i выходит из одномерного шара радиуса r, откуда из d-мерного шара радиуса r выходит и W_t: $\|W_t\| = \sqrt{{W_t^1}^2 + \dots + {W_t^d}^2} \geq \left|W_t^i\right| > r$ что и требовалось.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = \left(X_t, t \in \mathbb{R}_+^d\right)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией
$$R(s,t) = \prod_{k=1}^{d} \min(s_k, t_k),$$
где $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$.
Решение. Докажем, что $R(s,t)$ неотрицательно определена. Тогда по теореме 4.1 получим требуемое утверждение…

5. …
6. …

7. Пусть последовательность положительных чисел $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$. Докажите, что тогда $\left|W_{t_n}\right| \to +\infty$ п.н. с ростом n. Здесь $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс.
Решение. Имеем
$$\left|W_{t_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\ a.s. \Leftrightarrow \frac{1}{\left|W_{t_n}\right|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ a.s. \Leftrightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\left|W_{t_n}\right|} > 0\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\left|W_{t_n}\right|} > \varepsilon\right) = 0.$$
Имеем $W_t/\sqrt{t} \sim \mathcal{N}(0,1)$, поэтому для ее плотности $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0} < \frac{1}{2}$ и зафиксированного $\varepsilon > 0$
$$P\left(\frac{1}{|W_t|} > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{W_t}{\sqrt{t}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t}\varepsilon}\right) = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}} f(t)dt < \int_{-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}.$$
Пусть $A_n \coloneqq \left\{\frac{1}{\left|W_{t_n}\right|} > \varepsilon\right\}$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{t_n}} < \infty.$$
По лемме Бореля-Кантелли $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$, что и требовалось.

8. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями (стационарные приращения означают, что распределение $X_t - X_s$ зависит только от $t - s$). Докажите, что найдутся такие константы $a, b \in \mathbb{R}$, что процесс $Y_t = (X_t - at)/b$ является винеровским.
Решение. $\forall t > r > s$
$$\mu(t-s) \coloneqq \mathbb{E}(X_t - X_s) = \mathbb{E}(X_t - X_r) + \mathbb{E}(X_r - X_s) = \mu(t-r) + \mu(r-s),$$
т.е. $\mu(t-s) = k(t-s) + C$. Но
$$0 = \mu(0-0) = k(0-0) + C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow \mu(t-s) = k(t-s).$$
Также из $\sigma^2(0) = \mathbb{V}X_0 = 0$ и $\sigma^2(t-s) = \sigma^2(t-r) + \sigma^2(r-s)$ следует, что $\sigma^2(t-s) = m(t-s)$.
$$t - s = \mathbb{V}(Y_t - Y_s) = \frac{\mathbb{V}(X_t - X_s)}{b^2} = \frac{m(t-s)}{b^2} \Longrightarrow b = \sqrt{m},$$

$$0 = \mathbb{E}(Y_t - Y_s) = \mathbb{E}\left(\frac{X_t - X_s - a(t-s)}{b}\right) = \frac{k(t-s) - a(t-s)}{b} \Longrightarrow a = k.$$

9. …

5. Марковские моменты

1. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что случайные величины
$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k\,, \prod_{k=1}^{m} \tau_k\,, \sup_k \tau_k\,, \inf_k \tau_k$$
тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.
Решение. Имеем $T = \mathbb{N}$.
   a) Достаточно рассмотреть случай $m = 2$: $\forall t \in T$
$$\{\tau_1 + \tau_2 \le t\} = \bigcup_{s=1}^{t} \{\tau_1 = s\} \cap \{\tau_2 \le t - s\} \in \mathcal{F}_t,$$
поскольку в объединении $\{\tau_1 = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ и $\{\tau_2 \le t - s\} \in \mathcal{F}_{t-s} \subset \mathcal{F}_t$.
   b) Снова, достаточно рассмотреть случай $m = 2$: $\forall t \in T$
$$\{\tau_1 \cdot \tau_2 \le t\} = \bigcup_{s=1}^{t} \{\tau_1 = s\} \cap \left\{\tau_2 \le \frac{t}{s}\right\} \in \mathcal{F}_t,$$
поскольку в объединении $\{\tau_1 = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ и $\left\{\tau_2 \le \frac{t}{s}\right\} \in \mathcal{F}_{\frac{t}{s}} \subset \mathcal{F}_t$.
   c) Следует из
$$\left\{\sup_k \tau_k \le t\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\tau_k \le t\}.$$
   d) Следует из
$$\left\{\inf_k \tau_k \le t\right\} = \overline{\left\{\inf_k \tau_k > t\right\}} = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\tau_k > t\}} = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{\tau_k \le t\}}}.$$

2. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \ge 0)$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что
$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k\,, \max_{k=1,\ldots,m} \tau_k\,, \min_{k=1,\ldots,m} \tau_k$$
тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.
Решение. Имеем $T = [0, \infty)$.
   a) Достаточно рассмотреть случай $m = 2$: $\forall t \in T$
$$\{\tau_1 + \tau_2 \le t\} = \bigcup_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{\tau_1 = s\} \cap \{\tau_2 \le t - s\} \in \mathcal{F}_t,$$
поскольку в объединении $\{\tau_1 = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ и $\{\tau_2 \le t - s\} \in \mathcal{F}_{t-s} \subset \mathcal{F}_t$.
   b) Не отличается от 1c).
   c) Не отличается от 1d).

3. а) Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, где $T \subset \mathbb{R}_+$. Докажите, что τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величиной.

   б) Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а случайный процесс $(X_n, n \in \mathbb{N})$ согласован с $\mathbb{F}$. Докажите, что X_τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримым (считаем, что $X_\tau = +\infty$, если $\tau = +\infty$).

   Решение. а) Заметим сначала, что $\forall t \in T$ $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_\tau$. Значит, если $t = \infty$, то $\{\tau \le t\} = \Omega \subset \mathcal{F}_\tau$. Иначе $\forall s \in T$ $\{\tau \le t\} \cap \{\tau \le s\} = \{\tau \le \min(t,s)\} \in \mathcal{F}_{\min(t,s)} \subset \mathcal{F}_s$. Получили, что $\forall t \in T$ $\tau^{-1}\big((-\infty, t]\big) = \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_\tau$, что и требовалось.

   б) Поскольку $X_\tau = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \cdot \mathbb{I}(\tau = i)$, то $\forall x$ и $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\{X_\tau \le x\} \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\{X_i \le x\} \cap \{\tau = i\}) \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X_i \le x\} \cap \{\tau = i\} \in \mathcal{F}_n.$$

4. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}$, на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Докажите, что для марковских моментов σ, τ относительно $\mathbb{F}$ и для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$ выполнено
$$A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma.$$
   Замечание. В качестве следствия получаем, что если $\tau \le \sigma$, то $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

   Решение. Заметим сначала, что $\forall t \in T$
$$\{\tau = t\} = \bigcap_{\substack{\varepsilon \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \\ t - \varepsilon \in T}} \{\tau \le t\} \cap \{\tau > t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$$
$$\Longrightarrow \{\tau \ge t\} = \{\tau = t\} \cup \overline{\{\tau \le t\}} \in \mathcal{F}_t.$$
   Аналогично $\{\sigma \ge t\} \in \mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$. Также $\forall t \in T$
$$\{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\} = \bigcap_{s \in \mathbb{Q} \cap T} \{\tau \le s\} \cap \{s \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$
   Значит $\forall A \in \mathcal{F}_\tau$ $\forall t \in T$
$$A \cap \{\tau \le \sigma\} \cap \{\tau \le t\} = (A \cap \{\tau \le t\}) \cap (\{\tau \le t, t \le \sigma\} \cup \{\tau \le t, \sigma \le t, \tau \le \sigma\}) =$$
$$= (A \cap \{\tau \le t\} \cap \{t \le \sigma\}) \cup \Big(\underbrace{A \cap \{\tau \le t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\}}_{\in \mathcal{F}_t}\Big) \in \mathcal{F}_t$$
$$\Longrightarrow A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau.$$
   Также $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$ $\forall t \in T$
$$A \cap \{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\} = (A \cap \{\sigma \le t\}) \cap (\{\tau \le \sigma\} \cap \{\sigma \le t\}) \in \mathcal{F}_t$$
$$\Longrightarrow A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma.$$
   Получили, что $A \cap \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$, что и требовалось.

5. …

6. Пусть $(W_t, t \ge 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau = \min\{t \colon W_t = y\}$ для некоторого $y > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup\limits_{t \in [\tau, \tau + a]} W_t$.

   Решение. По теореме Бешелье $|W_t|$ распределена как $\sup\limits_{s \in [0,t]} W_s$. Имеем $\forall s \in T$
$$\{\tau \le s\} = \Big\{\min_{t \in \mathbb{Q}}\{t \colon W_t = y\} \le s\Big\} = \{\exists t \le s \colon W_t = y\} = \bigcup_{t \in [0,s] \cap \mathbb{Q}} \{W_t = y\} \in \mathcal{F}_s,$$
   следовательно, τ — марковский момент. Более того, по теореме двойного логарифма он также является моментом остановки, поскольку W_t принимает сколь угодно большие значения, а

значит $\tau < \infty\ \forall y > 0$. Пусть $X_a \coloneqq W_{\tau+a} - W_\tau$. Тогда $Y_a = \sup\limits_{t\in[0,a]} X_t + W_\tau = \sup\limits_{t\in[0,a]} X_t + y$ имеет то же распределение, что и $|X_a| + y$, или $|W_a| + y$, где $W_a \sim \mathcal{N}(0, a)$, а значит плотность Y_a есть

$$f_{Y_a}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a}} \mathbb{I}(x \geq y).$$

7. …
8. …
9. …

6. Мартингалы

1. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

   Решение. Имеем $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, следовательно $\mathbb{E}(W_t^2) = t^2$ и $\forall s < t$

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2 - t|\mathcal{F}_s) =$$
$$= W_s^2 + 2W_s \cdot \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s)}_{=t-s} - t = W_s^2 - s = Y_s.$$

2. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс

$$(X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, t \geq 0)$$

   является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

   Решение. Имеем $\mathbb{E}X_t = e^{\frac{\alpha^2 t}{2} + \beta t} < \infty$. Используя то, что при $X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $\mathbb{E}e^{X_t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$, а также что $\alpha(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}\big(0, \alpha^2(t-s)\big)$, получаем $\forall s < t$

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\big(e^{\alpha W_t + \beta t}\big|\mathcal{F}_s\big) = \mathbb{E}\big(e^{\alpha W_s + \beta t}\big|\mathcal{F}_s\big) \cdot \mathbb{E}\big(e^{\alpha(W_t - W_s)}\big|\mathcal{F}_s\big) = e^{\alpha W_s + \beta t} \cdot e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}}.$$

   Значит, X_t будет мартингалом (соответственно суб/супермартингалом), когда $e^{\alpha W_s + \beta t} \cdot e^{\frac{\alpha^2(t-s)}{2}} = e^{\alpha W_s + \beta s}$ ($\leq$ или $\geq$) или $\beta + \frac{\alpha^2}{2} = 1$ ($\leq$ или $\geq$).

3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \dots, x_n)$ случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ — другая последовательность случайных величин, причем также для любого n существует плотность $g_n(x_1, \dots, x_n)$ случайного вектора $(\eta_1, \dots, \eta_n)$. Докажите, что процесс

$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}$$

   является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), n \in \mathbb{N})$.

   Решение. Имеем (???)

$$\mathbb{E}X_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{g_n(x_1, \dots, x_n)}{f_n(x_1, \dots, x_n)} \cdot f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x)}{f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x)} \cdot f_{x|\xi_1, \dots, \xi_{n-1}}(x|\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{g_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{f_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} \cdot g_{x|\dots}(x| \dots)dx = X_{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{x|\dots}(x| \dots)dx = X_{n-1}.$$

4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а τ — момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс
$$\left(X_t = W_{\min(t,\tau)}, t \geq 0\right)$$
является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.
Решение. …

5. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц $\mathrm{Pois}(3)$. Найдите разложение Дуба-Мейера для данного процесса.
Решение. Имеем
$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{X_{t-1}} \xi_i^t \,|\mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} \mathbb{E}\left(\xi_i^t|\mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} 3 = 3X_{t-1}.$$
Процесс $A_t = 2X_{t-1}$ предсказуемый, а $M_t = X_t - A_t = X_t - 2X_{t-1}$ является мартингалом:
$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 3X_{t-1} - 2X_{t-1} = X_{t-1}.$$

6. Докажите, что если τ — марковский момент относительно $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, то τ является и опциональным моментом относительно $\mathbb{F}$.
Решение. Следует из-за того, что $\{\tau < t\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{i}\right\}$.

7. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau = \min\{t: |W_t| = 1\}$. Вычислите $\mathbb{E}\tau$.
Решение. Рассмотрим винеровский мартингал $Y_t = W_t^2 - t$. По лемме 6.1 имеем $0 = \mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}Y_\tau = \mathbb{E}(W_\tau^2 - \tau)$, откуда $\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}W_\tau^2 = 1$.

8. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n$, $n \geq 1$. Обозначим $\tau = \min\{n: S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $\mathbb{E}\tau$.
Решение. Имеем
$$\mathbb{E}_{n-1}X_n \coloneqq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}_{n-1}(x + S_{n-1} + \xi_n) = X_{n-1} + \mathbb{E}\xi_n = X_{n-1} + 2p - 1.$$
Рассмотрим $Y_n \coloneqq X_n - (2p-1)n$. Тогда
$$\mathbb{E}_{n-1}Y_n = \mathbb{E}_{n-1}X_n - (2p-1)n = X_{n-1} - (2p-1)(n-1) = Y_{n-1},$$
т.е. Y_n мартингал, а значит
$$x = \mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}Y_\tau = \mathbb{E}(X_\tau - (2p-1)\tau) \Longrightarrow \mathbb{E}\tau = \frac{\mathbb{E}X_\tau - x}{2p-1} = \frac{\mathbb{E}S_\tau}{2p-1}.$$

7. Марковские процессы

8. Марковские цепи с дискретным временем

1. …

2. …
3. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1, 2, 3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п.н. и матрицей переходных вероятностей
$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$
Положим $\eta_n = \mathbb{I}\{\xi_n = 1\} + 2\mathbb{I}\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n тоже марковская цепь, и найдите ее матрицу переходов.
Решение. Имеем
$$a_{11} = P(\eta_n = 1|\eta_{n-1} = 1) = P(\xi_n = 1|\xi_{n-1} = 1) = \frac{3}{7}$$
$$a_{12} = P(\eta_n = 2|\eta_{n-1} = 1) = \frac{4}{7}$$
$$a_{21} = P(\eta_n = 1|\eta_{n-1} = 2) = \frac{P(\eta_n = 1, \eta_{n-1} = 2)}{P(\eta_{n-1} = 2)} = \frac{P(\xi_n = 1, \xi_{n-1} = 2) + P(\xi_n = 1, \xi_{n-1} = 3)}{P(\eta_{n-1} = 2)} =$$
$$= \frac{P(\xi_n = 1|\xi_{n-1} = 2) \cdot \big(P(\xi_{n-1} = 2) + P(\xi_{n-1} = 3)\big)}{P(\eta_{n-1} = 2)} = P(\xi_n = 1|\xi_{n-1} = 2) = \frac{1}{11}$$
$$a_{22} = P(\eta_n = 2|\eta_{n-1} = 2) = \frac{10}{11}.$$
Матрица переходов: $\begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/11 & 10/11 \end{pmatrix}$.

4. Марковская цепь $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $P(\xi_{n+1} = k + 1|\xi_n = k) = p$, $\quad P(\xi_{n+1} = k|\xi_n = k) = 1 - p$, $\quad k, n \in \mathbb{N}$, $\quad p \in [0, 1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0, \tau_k = \min\{n: \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите ее переходные вероятности.
Решение. Имеем, что $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$, где $\eta_i \sim \mathrm{Bern}(p)$, т.е. $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p)$. Имеем $\tau_k - \tau_{k-1} \sim \mathrm{Geom}(p)$, следовательно
$$P(\tau_k = n|\tau_{k-1} = m) = P(\tau_k - \tau_{k-1} = n - m|\tau_{k-1} = m) = (1 - p)^{n-m-1}p.$$

5. Цепь Маркова имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности
$$P(\xi_{n+1} = k + 1|\xi_n = k) = a^{-k}, \qquad P(\xi_{n+1} = k|\xi_n = k) = 1 - a^{-k},$$
где $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $a > 1$. Найдите $\mathbb{E}a^{\xi_n}$, $\mathbb{V}a^{\xi_n}$.
Решение. Имеем
$$\mathbb{E}\big(a^{\xi_n}\big|\xi_n = k\big) = a^{k+1} \cdot a^{-k} + a^k \cdot \big(1 - a^{-k}\big) = a + a^k - 1.$$
Значит
$$\mathbb{E}a^{\xi_n} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\big(a^{\xi_n}\big|\xi_{n-1}\big)\right) = \mathbb{E}\big(a + a^{\xi_{n-1}} - 1\big) = \mathbb{E}a^{\xi_{n-1}} + a - 1.$$
Оттуда $\mathbb{E}a^{\xi_n} = n(a - 1) + 1$. Также $\mathbb{V}a^{\xi_n} = \mathbb{E}a^{2\xi_n} - \big(\mathbb{E}a^{\xi_n}\big)^2$,
$$\mathbb{E}a^{2\xi_n} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\big(a^{2\xi_n}\big|\xi_{n-1}\big)\right) = \mathbb{E}\left(a^{2(\xi_{n-1}+1)} \cdot a^{-\xi_{n-1}} + a^{2\xi_{n-1}} \cdot \big(1 - a^{-\xi_{n-1}}\big)\right) =$$
$$= \mathbb{E}\big(a^{\xi_{n-1}+2} + a^{2\xi_{n-1}} - a^{\xi_{n-1}}\big) = \mathbb{E}a^{2\xi_{n-1}} + (a^2 - 1)\mathbb{E}a^{\xi_{n-1}}.$$
Поступив как выше находим $\mathbb{E}a^{2\xi_n} = n(a^2 - 1)(n(a - 1) + 1) + 1$.

6. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что
а) у нее есть несколько стационарных распределений, но нет предельного;

б) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

Решение. а) Годится единичная матрица I.

б) Рассмотрим симметричное случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n$, т.е. $P(\xi_i = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. Тогда у S_n нет стационарного распределения (???).

Пусть теперь какая-то однородная марковская цепь с дискретным временем матрицей переходов P имеет хотя бы два стационарных распределения x_1, x_2. Тогда $\forall \lambda \in (0, 1)$ $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ снова есть стационарное распределение:

$$xP = [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2]P = \lambda x_1 P + (1 - \lambda) x_2 P = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 = x.$$

Таким образом получаем континуум стационарных распределений.

7. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями $\{0, 1, 2, 3\}$ и следующим распределением:

$$P(\xi_n = 0) = \frac{1}{7}, \qquad P(\xi_n = 1) = \frac{2}{7}, \qquad P(\xi_n = 2) = \frac{3}{7}, \qquad P(\xi_n = 3) = \frac{1}{7}.$$

Рассматриваются процессы $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \pmod 4$, $n \in \mathbb{N}$ (остаток от деления суммы на 4) и $Y_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n \pmod 4$. Докажите, что $(X_n, n \in \mathbb{N})$ и $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ являются однородными марковскими цепями, и найдите их стандартные распределения.

Решение. X_n однородный:

$$P(X_n = k | X_{n-1}) = P(X_{n-1} + \xi_n = k | X_{n-1}, \dots) = P(\xi_n = k - X_n | X_{n-1}, \dots) = P(\xi_n = k - X_n | X_{n-1}).$$

Матрица перехода X_n есть $\begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 1/7 & 1/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ есть его стационарное распределение. По лемме 8.4 это и есть предельное распределение X_n.

Матрица перехода Y_n есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 & 1/7 \\ 4/7 & 0 & 3/7 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 3/7 & 2/7 \end{pmatrix}$. Пусть (x_n, y_n, z_n, w_n) есть его распределение за n шагов. Тогда $y_n + z_n + w_n \le \frac{6}{7}(y_{n-1} + z_{n-1} + w_{n-1})$, а значит $y_n + z_n + w_n \to 0$, $x_n \to 1$, т.е. предельным является распределение $(1, 0, 0, 0)$.

9.